

Quaderni di Finanza

Il valore atteso ed il valore atteso unitario



Mauro  Perotti

Anno 2020

Quaderni di Finanza

Anno 2020

Tutti i diritti sono riservati

Per informazioni: foreights@libero.it



Sommario

Disclaimer	2
Il valore atteso.....	3
Simuliamo con Excel	4
Il valore atteso in formula	6
L'iperbole del gioco equo.....	7
Conclusioni.....	13
Il valore atteso unitario	15
Prima considerazione	16
Seconda considerazione	16



Disclaimer

Le considerazioni e gli argomenti proposti hanno valore puramente didattico e non costituiscono sollecitazione all'investimento, né debbono essere intesi come raccomandazioni ad acquistare o a vendere qualsivoglia strumento finanziario.

Fare trading, soprattutto a leva, comporta dei rischi anche molto elevati e le perdite possono eccedere il proprio deposito. Chiunque intendesse operare sulla base dei contenuti qui presentati lo fa a suo esclusivo *rischio e pericolo*.

Non si assumono responsabilità per qualunque perdita dovesse essere subita sulla base degli argomenti qui trattati.

Il valore atteso

Qualche tempo fa, alcuni amici trader, mi hanno chiesto di identificare un metodo scientifico per capire chi di loro fosse il più bravo nell'attività di negoziazione finanziaria. Dopo aver escluso alcune delle idee che possono venire subito alla mente, in risposta ad una tale domanda (come il guadagno assoluto o la percentuale di profitto in un certo lasso di tempo), mi sono preso il mio tempo ed ho cercato di ideare un metodo che fosse il più oggettivo possibile.

Dopo averlo elaborato e dato risposta agli amici ho pensato che dovesse essere una conoscenza a disposizione di ogni trader soprattutto perché, come tra breve osserveremo, si tratta di una modalità di misura dell'efficacia di un modello di trading e può essere impiegata (ed è ciò che più ritengo importante) per consentire al trader di monitorare i propri progressi.

Per prima cosa devo fare una premessa (qualunque elaborazione scientifica, come un teorema matematico, poggia su una o più premesse). Supporrò che sia vera la *random walk theory*, ovvero la teoria che i prezzi di un'attività finanziaria si muovano in modo casuale ed assolutamente imprevedibile. Poi, su questa premessa, ci torneremo.

Fare trading, allora, è come scommettere ad un gioco, con esiti casuali. Pensiamo ad una moneta non truccata. Potremmo decidere di scommettere un euro vincendone un altro, se esce la faccia Testa, oppure perdendolo, se esce la faccia Croce. E' un gioco equo? Certamente sì, ma perché?

Qualcuno potrebbe dire: io faccio una puntata, vinco (almeno spero...) e poi me ne vado. Ma per capire se un

gioco è equo dobbiamo valutarlo nel lungo periodo. Potremmo, ad esempio, pensare di fare 1000 lanci della nostra moneta per vedere che cosa succede.

Simuliamo con Excel

Usando la funzione CASUALE.TRA possiamo chiedere di

	A	B	C	D	E
1	1	Croce		N.ro totale lanci:	1000
2	0	Testa		N.ro totale esiti "Testa":	516
3	0	Testa		N.ro totale esiti "Croce":	484
4	1	Croce			
5	1	Croce			
6	0	Testa			
7	1	Croce			
8	1	Croce			
9	1	Croce			
10	0	Testa			
11	0	Testa			
12	1	Croce			
13	1	Croce			
14	0	Testa			
15	0	Testa			

generare un numero casuale compreso tra 0 ed 1 associando a 0, l'evento Testa, e ad 1, l'evento Croce.

Copiamo, poi, il contenuto della cella A1 nelle 999 celle successive ed avremo così simulato 1000 lanci di una moneta non truccata.

Contiamo, quindi, il numero di volte in cui si presenta l'esito Testa ed il numero di volte in cui si presenta l'esito Croce. Come si nota, la probabilità di ciascuno di questi esiti tende al 50% e vi si avvicina tanto più quanto maggiore è il numero dei lanci.

Ora, senza scomodare il teorema del limite centrale, presumo che ciò che sto scrivendo sia intuitivamente accettabile da ciascuno di noi.

	A	B	C	D	E
1	1		N.ro totale lanci:	1000	
2	2				
3	5			<i>frequenza</i>	
4	4		N.ro totale esiti "faccia 1":	151	0,151
5	5		N.ro totale esiti "faccia 2":	167	0,167
6	2		N.ro totale esiti "faccia 3":	173	0,173
7	3		N.ro totale esiti "faccia 4":	164	0,164
8	1		N.ro totale esiti "faccia 5":	181	0,181
9	1		N.ro totale esiti "faccia 6":	164	0,164
10	4				
11	4				
12	2				
13	2				
14	1				
15	1				
16	3				
17	5				
18	1				
19	3				

Naturalmente la stessa cosa potremmo farla utilizzando un dado a sei facce, anch'esso equilibrato, chiedendo aiuto, ancora una volta, al nostro fidato amico Excel. Come si nota, anche qui, la frequenza con cui si presenta ciascuna delle sei facce tende alla probabilità teorica ($1/6 \cong 0,167$).

Ora, indichiamo con G ciò che guadagniamo e con P ciò che perdiamo. Che cosa sarebbe accaduto con i mille lanci della moneta, immaginando che G e P siano eguali fra loro e che siano pari ciascuno ad 1 €?

$$G \cdot 513 - P \cdot 487 = 26 \text{ €}$$

Dividendo, primo e secondo membro per il numero dei lanci, si ottiene:

$$G \cdot \frac{513}{1000} - P \cdot \frac{487}{1000} = \frac{26}{1000} \rightarrow G \cdot 51,3\% - P \cdot 48,7\% = 0,026 \text{ €}$$

Come ci racconta la legge dei grandi numeri, se facciamo tendere ad infinito il numero dei lanci, la frequenza tende alla probabilità che, nel caso di una moneta equilibrata, assegna, all'evento "Testa", la probabilità del 50% esattamente come quella assegnata all'evento "Croce". E quindi, immaginando di giocare per un numero infinito di volte avremo:

$$G \cdot 50\% - P \cdot 50\% = 0 \text{ €}$$

essendo G e P uguali fra loro.

Questa relazione esprime il concetto di valore atteso o speranza matematica e, quando tale valore è nullo, vuol dire che ci troviamo dinanzi ad un gioco equo. Un gioco dove non ha senso giocare (se non per il puro divertimento ludico)!

Il valore atteso in formula

In generale, quindi, se indichiamo con VA il valore atteso e con W la probabilità di vincere, possiamo generalizzare la formula precedente nel seguente modo:

$$VA = G \cdot W - P \cdot (1 - W)$$

Facciamo subito un esempio. Se vi dicessero:

vuoi giocare con un dado equilibrato vincendo 450 € quando esce una qualunque faccia escluso il 6 e perdere 1.200 € se esce il 6?

Che cosa rispondereste voi? Ora che conoscete la formula del valore atteso potete applicarla per capire se la scommessa che vi è stata proposta è per voi conveniente o meno. Vediamo.

$$VA = G \cdot W - P \cdot (1 - W) = 450 \cdot \frac{5}{6} - 1200 \cdot \left(1 - \frac{5}{6}\right) = 375 - 200 = 175 \text{ €}$$

Direi che è molto conveniente!

L'iperbole del gioco equo

Torniamo un momento al valore atteso e consideriamo il caso di un gioco equo per il quale, appunto, il valore atteso è nullo.

$$VA = G \cdot W - P \cdot (1 - W) = 0$$

Dividendo sia il secondo che il terzo membro per P, si ha:

$$\frac{G}{P} \cdot W - \frac{P}{P} \cdot (1 - W) = \frac{0}{P} \rightarrow \frac{G}{P} \cdot W - (1 - W) = 0$$

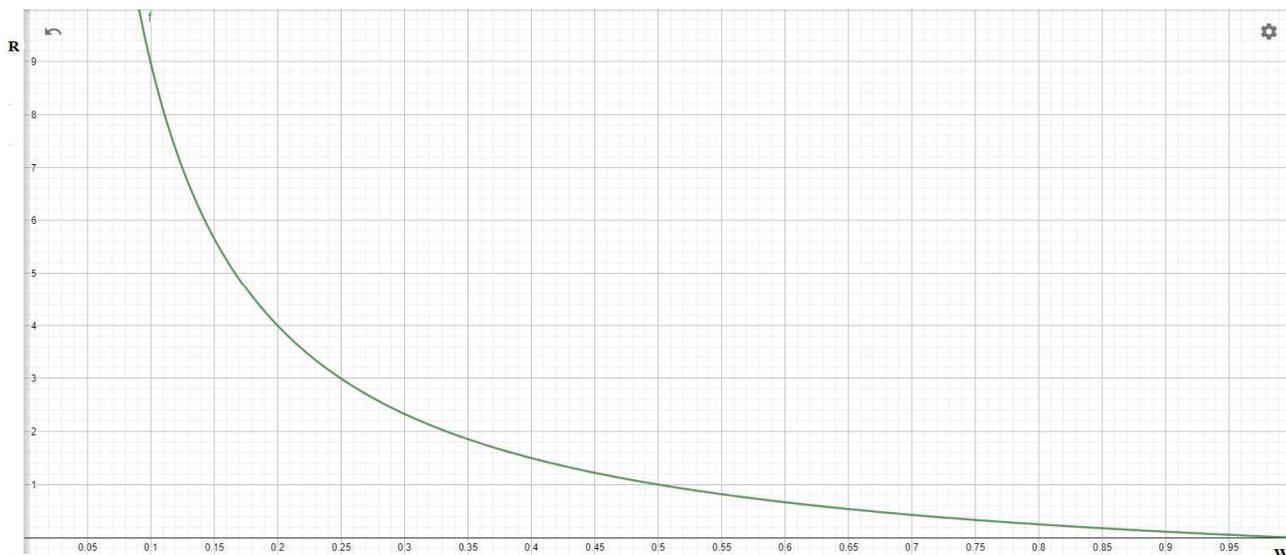
Se indichiamo con R il rapporto tra guadagno e perdita possiamo scrivere:

$$R \cdot W - (1 - W) = 0$$

Dopo alcuni semplici passaggi possiamo esplicitare R rispetto a W pervenendo alla funzione:

$$R \cdot W = (1 - W) \rightarrow R = \frac{(1 - W)}{W} \rightarrow R = \frac{1}{W} - 1$$

Si tratta dell'equazione di un'iperbole. Proviamo a rappresentarla, in un sistema di riferimento cartesiano, ponendo R sull'asse delle ordinate e W sull'asse delle ascisse. Con un programma come Geogebra - reperibile gratuitamente in rete - possiamo disegnare il grafico di questa funzione.



Dal momento che siamo partiti da un valore atteso nullo, tutti i punti che giacciono su questa curva rappresenteranno una coppia di valori (R,W) che corrispondono ad una speranza matematica eguale a zero. Vediamo un paio di esempi: in corrispondenza di W=0,5 (50%) si trova R=1. E' il caso dell'esempio della moneta che abbiamo già visto. Oppure, per W=0,25 (25%) si legge R=3. Vediamo se è vero.

$$R = \frac{1}{W} - 1 \rightarrow 3 = \frac{1}{0,25} - 1$$

Ovvero, se guadagniamo tre unità una volta su quattro e ne perdiamo una tre volte su quattro, il valore atteso è nullo.

In tabella ho riportato alcune coppie di R, W.

R	9,00	4,00	2,33	1,50	1,00	0,67	0,43	0,25	0,11
W	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90

Proviamo ad analizzare qualcuna di queste coppie. Se W=0,1 (10%) vuol dire che per avere valore atteso nullo dobbiamo guadagnare nove volte ciò che perdiamo. Oppure, per W=0,8 (80%) abbiamo R=0,25: cioè, se le

probabilità di vincere sono l'80%, per avere valore atteso nullo dobbiamo perdere quattro volte ciò che guadagniamo.

Fatta questa premessa passiamo al trading ed alla domanda dalla quale siamo partiti.

Come facciamo a dire se un trader è più bravo di un altro? Oppure, e direi che è ciò che più ci interessa, come facciamo a monitorare, nel tempo, le nostre prestazioni?

Riprendiamo la curva e facciamo un paio di osservazioni.

Consideriamo il punto che si trova all'intersezione di $R=5$ e $W=0,3$ e calcoliamo il corrispondente valore atteso. Notiamo, prima, che si tratta di un punto che giace sopra la curva che, ricordiamolo, rappresenta tutte le possibili coppie $(R;W)$ per i cui valori VA è nullo. Vediamo il valore di VA .

$$VA = G \cdot W - P \cdot (1 - W) = 5 \cdot 0,3 - 1 \cdot (1 - 0,3) = 1,5 - 0,7 = 0,8$$

VA è positivo, quindi significa che il nostro sistema, nel lungo termine, guadagna. Notate che non conoscendo G e P singolarmente ho scelto una coppia di valori il cui rapporto fosse comunque pari a 5 (ho considerato $G=5$, e $P=1$).

Ad esempio, se si tratta di euro, significa che tre volte su dieci guadagniamo 5 € e sette volte su dieci perdiamo 1 €. Ovvero:

$$5 \cdot 3 - 1 \cdot 7 = 15 - 7 = 8$$

Se, quindi, dopo 10 giocate abbiamo guadagnato 8 €, significa che per singola giocata guadagneremo 0,8 €.

Ed ora proviamo a prendere il punto che si trova all'intersezione di $R=3$ e $W=0,15$ e calcoliamo il corrispondente valore atteso (con $G=3$, e con $P=1$). Questa volta, come si osserverà, è stato scelto un punto che giace sotto la curva. Vediamo il valore di VA per questa nuova coppia di valori.

$$VA = G \cdot W - P \cdot (1 - W) = 3 \cdot 0,15 - 1 \cdot (1 - 0,15) = 0,45 - 0,85 = -0,4$$

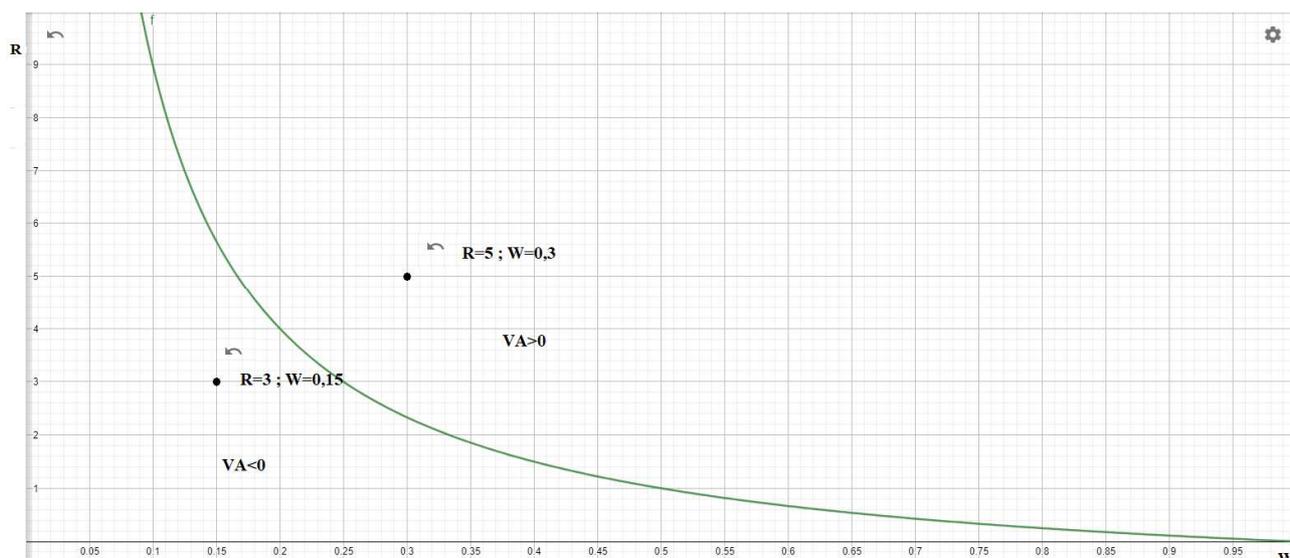
VA è negativo: il nostro sistema, nel lungo termine, perde.

Ad esempio, se si tratta di euro, significa che 15 volte su 100 guadagniamo 3 € e 85 volte su 100 perdiamo 1 €. Ovvero:

$$3 \cdot 15 - 1 \cdot 85 = 45 - 85 = -40$$

Se, quindi, dopo 100 giocate abbiamo perso 40 €, significa che per ogni singola giocata perderemo 0,4 €. Tutto questo ci porta alla seguente generalizzazione:

tutte le coppie di punti (R;W) che giacciono nel semipiano superiore alla curva corrispondono a valori attesi positivi; mentre, tutte le coppie di punti (R;W) che giacciono nel semipiano inferiore alla curva corrispondono a valori attesi negativi.



Ora, che cosa rappresentano le variabili W ed R in un modello di trading? La variabile W rappresenta la percentuale di operazioni positive, operazioni che hanno prodotto un guadagno. E su questa affermazione credo ci sia convergenza di tutti. E per la variabile R come facciamo? Il trading non è una scommessa dove la posta è stabilita a priori. Dovremo, allora, fare una media di tutti i guadagni ed una media di tutte le perdite. Il rapporto di tali medie ci fornirà proprio R . Proviamo a fare un esempio numerico ricorrendo, ancora una volta, ad Excel.

	A	B	C	D	E
1	N° operazione	Gain/Loss		W=	50%
2	1	-6		GM=	5,93
3	2	2		PM=	5,07
4	3	0		R=	1,17
5	4	-5			
6	5	-3		VA=	0,43
7	6	-9			
8	7	-2			
9	8	5			
10	9	6			
11	10	-4			
12	11	10			
13	12	-8			
14	13	2			
15	14	-7			
16	15	7			
17	16	-2			
18	17	1			
19	18	8			
20	19	8			
21	20	-10			
22	21	-8			
23	22	-7			
24	23	6			
25	24	10			
26	25	6			
27	26	2			
28	27	-3			
29	28	-2			
30	29	10			
31	30	6			
32		0,43			

Proviamo a simulare 30 operazioni che possono avere, ciascuna, un guadagno oppure una perdita; tali guadagni e perdite potranno variare tra una e dieci unità monetarie (valori interi per semplicità). Vediamo il foglio Excel.

In colonna B vi sono le trenta operazioni, generate casualmente (è stata usata, ancora una volta, la funzione CASUALE.TRA). La cella E1, invece, contiene la percentuale di operazioni in profitto. Nelle celle E2 ed E3, rispettivamente, sono riportati il guadagno

medio (GM) e la perdita media (PM). Il rapporto tra queste celle è riportato in E4. Infine, in cella E6, vi è il valore atteso calcolato come segue:

$$VA = GM \cdot W - PM \cdot (1 - W)$$

Un'osservazione: come si può notare dal campo della formula, in cella B32 è stata riportata la somma di tutti i guadagni e di tutte le perdite, rapportata al numero delle

operazioni. Tale operazione conduce a quella metrica che nell'ambito disciplinare di coloro che si occupano di trading system si chiama *guadagno medio per trade*. Ebbene, come noterete, altro non è che il valore atteso!

Conclusioni

Che cosa rappresenta l'elenco delle operazioni riportate in colonna B? Potrebbe essere l'elenco degli eseguiti di un trader discrezionale che ha operato, ad esempio, nell'ultimo mese. E come valutare l'efficacia di tale trader, magari rispetto ad un altro o più altri trader? Raffrontando i rispettivi valori attesi! Tanto più questo sarà alto, tanto più efficace sarà l'attività di negoziazione di quel trader.

Ma potrebbe essere, ed è ciò che più dovrebbe interessarci, l'elenco delle nostre operazioni. Magari quelle dell'anno passato. Da confrontarsi con quelle dell'anno in corso, una volta che questo sia terminato. Ecco, quindi, come enunciato in incipit, uno strumento semplice ed efficace di monitoraggio della nostra attività di trading. Oggettivo e scientifico.

Infine, un'altra riflessione. Quelle operazioni potrebbero essere il risultato di uno studio di analisi di un sistema che stiamo elaborando. Magari basato sul supertrend 3 minuti applicato al Nasdaq. Oppure sulle candele A applicato al Dax 10 minuti, o sulla regressione lineare, solo per fare qualche esempio. Dopo aver applicato un determinato percentile, qual è l'elenco delle operazioni che si sarebbero avute? E quale valore atteso avrebbero prodotto?

Qualunque trader, a mio modesto avviso, prima di cominciare ad operare secondo le regole dettate da un certo modello di trading, sarebbe opportuno - direi necessario -



che verificasse che quel modello abbia un valore atteso positivo. Almeno. Almeno perché poi vi sono altre metriche di cui il trader deve tener conto e delle quali tratteremo in un'altra occasione.

Il valore atteso unitario

Che cos'è il valore atteso unitario? In letteratura non ve ne è traccia, almeno per quelle che sono le mie conoscenze. Il concetto qui ideato, però, credo sia in grado di indurre, nel trader, importanti riflessioni sulla propria attività.

Riprendiamo la formula del valore atteso.

$$VA = G \cdot W - P \cdot (1 - W)$$

Dividiamo per P entrambi i membri dell'equazione:

$$\frac{VA}{P} = \frac{G}{P} \cdot W - \frac{P}{P} \cdot (1 - W)$$

che possiamo anche riscrivere nella forma:

$$\frac{VA}{P} = R \cdot W - (1 - W)$$

È questo ciò che io chiamo *valore atteso unitario*.

$$VAU = R \cdot W - (1 - W)$$

Si tratta, in sostanza, del rapporto tra il valore atteso e la perdita media. Cerchiamo di capire, con un esempio, che cosa ci indica.

Supponiamo che il nostro sistema sia profittevole l'80% delle volte, che il guadagno medio sia di 500 € e che la perdita media sia di 1000 €. Calcoliamo VA e VAU.

$$VA = G \cdot W - P \cdot (1 - W) = 500 \cdot 0,8 - 1000 \cdot (1 - 0,8) = 400 - 200 = 200 \text{ €}$$

$$VAU = 0,5 \cdot 0,8 - (1 - 0,8) = 0,4 - 0,2 = 0,2$$

Quindi il valore atteso, o guadagno medio per trade, vale 200 €. Ricordo che questo significa che per ogni trade, in media, guadagniamo 200 €. Il valore atteso unitario, invece, vale 0,2. Ed è giusto, in quanto si tratta del rapporto tra il valore atteso (200 €) e la perdita media (1000 €). Ma cosa significa questo 0,2 (o 20% che dir si voglia)? Cerchiamo di interpretarlo. Vuol dire che il guadagno medio per trade è il 20% della perdita media. E qui possiamo fare almeno due considerazioni.

Prima considerazione

Quando analizziamo un modello di trading, ci dobbiamo sempre chiedere quale sarà il nostro stop loss medio. Ma perché? Oltre che per tante altre ragioni (dimensionamento del capitale, valutazioni psicologiche, ecc.) perché il nostro valore atteso sarà una percentuale di tale stop loss. Nell'esempio precedente era il 20%. Cioè, uno stop medio di 1000 € ci consentiva di avere un guadagno medio per trade di 200 €.

Quindi, maggiore è lo stop loss e maggiore sarà il valore atteso!

Seconda considerazione

I sistemi di scalping che operano con stop loss particolarmente ridotti sono destinati, nel lungo termine, ad

essere perdenti. Facciamo anche qui un esempio. Se dovessimo operare, sul Dax, con un sistema che ha un VAU di 0,2 ed una perdita media di 125 € (5 punti del contratto pieno) avremo che il nostro guadagno medio per trade sarà di 25€! Ora, un tale guadagno medio non sarebbe in grado di assorbire i costi connessi con l'attività di negoziazione costituiti dalle commissioni dirette e indirette (o, come a me piace denominarle, occulte).

Quindi, ancora una volta, attenzione! Quando si sceglie di operare con un modello di trading, verificare sempre prima VA e VAU.