Funzioni e derivate (parte prima)

Usare le greche per la gestione di una strategia di opzioni non è solo conveniente ma, non faccio fatica ad affermarlo, è assolutamente necessario. Questo perché il valore di un'opzione, a differenza di uno strumento lineare (azione o future), non dipende solo dal movimento del sottostante ma anche dal trascorrere del tempo e dall'andamento della volatilità implicita. E, tanto per non farci mancare nulla, il valore di questi strumenti finanziari è legato anche al variare dei tassi di interesse e dell'eventuale stacco di dividendi.

Per capire bene le greche, però, è necessario comprendere il concetto di derivata di una funzione. E sarà proprio questo il focus di questo primo articolo su cui si dovrà concentrare l'attenzione del lettore. Naturalmente lo scopo non è quello di trattare questi argomenti come normalmente si fa in un corso formale di matematica. L'obiettivo, piuttosto, sarà quello di comprenderne gli aspetti che a noi opzionisti maggiormente possono interessare.

Che cos'è una funzione?

Tutti noi abbiamo dimestichezza con le funzioni. Magari non le chiamiamo in questo modo ma, anche sfogliando un quotidiano, possiamo incontrarne più di qualcuna. L'andamento nel tempo di una variabile economica come il PIL, ad esempio, oppure l'andamento della temperatura media, nel corso dell'ultimo anno, rilevata in una città italiana. Ma anche, la traccia riportata da un oscillografo nel corso di un evento sismico. Sono tutti esempi di funzioni. Da un punto di vista grafico, vi sono diversi modi per rappresentare una funzione. Tutti con lo scopo di aiutarci a visualizzare quel particolare fenomeno. Ci sono i grafici a torta, gli istogrammi, i grafici polari e quelli cartesiani, tanto per citarne qualcuno.

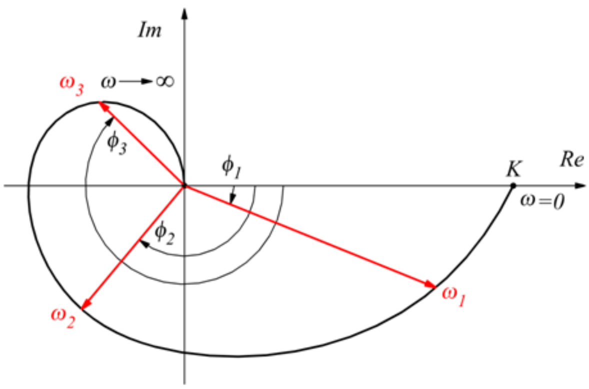


Figura 1

La figura 1, per esempio, mostra il diagramma di Nyquist di una funzione di trasferimento. Si tratta di uno strumento molto usato da chi si occupa dello studio di sistemi (termici, meccanici, elettrici, ecc.).

La curva viene tracciata su un particolare sistema di assi cartesiani dove su quello orizzontale vengono rappresentati i numeri reali e su quello verticale i numeri immaginari.

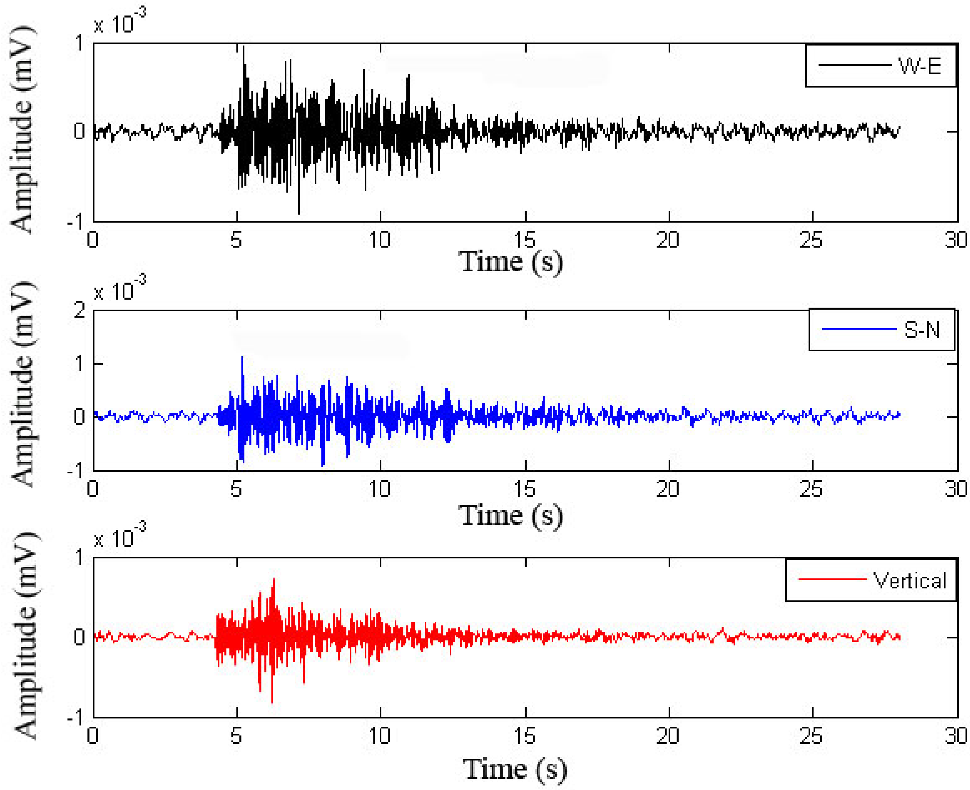


Figura 2

La figura 2, invece, mostra tre grafici che rappresentano l'andamento, nel tempo, della posizione del terreno nelle tre direzioni principali (verticale, nord-sud, est-ovest). Si tratta di curve che consentono, ad un sismologo, di svolgere il suo lavoro e fare calcoli, ad esempio, per determinare la magnitudo Richter associata ad un evento sismico.

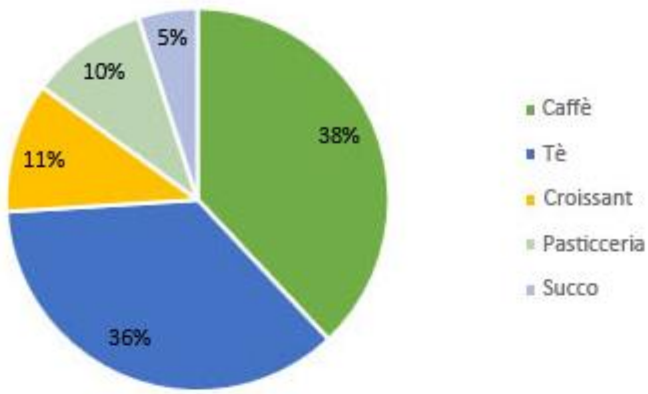


Figura 3

In figura 3, per fare un altro esempio, abbiamo un grafico a torta utile quando una o due, delle sezioni rappresentate, comprendono più del 50% del totale. In questo caso viene mostrata la composizione del fatturato di un bar nell'arco di un esercizio annuale.

Il riferimento cartesiano

Ma il grafico che maggiormente viene utilizzato, e che anche a noi opzionisti più interessa, è il grafico cartesiano. Si chiama in questo modo perché fu proprio Cartesio ad introdurlo per la prima volta (1637) anche se, in maniera indipendente, a questa modalità di rappresentazione vi era giunto anche Pierre de Fermat.

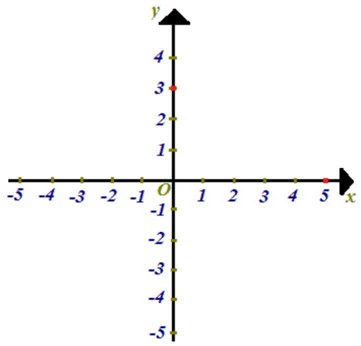


Figura 4

Cartesio ebbe questa idea spinto dalla necessità di rappresentare, in modo univoco, uno o più punti nel piano.

Ma vediamo come è fatto un sistema di riferimento cartesiano. Ci sono due segmenti orientati (cioè, ciascuno con una freccia ad un estremo) disposti ortogonalmente uno rispetto all'altro o, che è la stessa cosa, che formano 4 angoli di 90° ciascuno. L'asse orizzontale, dove in genere viene rappresentata la variabile x, si chiama asse delle ascisse; quello verticale, dove rappresentiamo la variabile y, si chiama asse delle ordinate. Ciascun punto di ognuno di questi due assi è in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri reali. Ma che cosa significa? Che dato un numero reale, per esempio 5, questo sarà rappresentato da uno ed un solo punto sull'asse delle x (in figura 4, indicato col pallino rosso). E viceversa. Prendiamo, ad esempio, il pallino rosso sull'asse delle y: questo corrisponderà in modo univoco al numero 3. Le frecce, come si dovrebbe intuire osservando la figura, indicano il verso crescente.

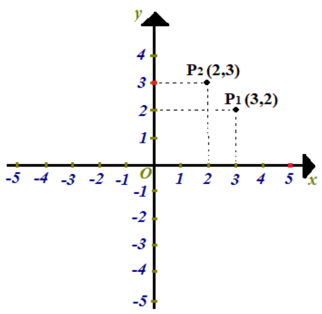


Figura 5

La grande innovazione di Cartesio, come si diceva prima, e che non solo è possibile rappresentare punti su ciascuna delle due rette che individuano gli assi, ma anche punti sul piano. La figura 5 mostra, ad esempio, la corrispondenza biunivoca tra il punto P_1 e la coppia ordinata di numeri (3,2). Questi due numeri rappresentano le coordinate di tale punto (il primo l'ascissa ed il secondo l'ordinata). Ma abbiamo detto coppia ordinata. Perché? Perché l'ordine è importante. Se invertiamo i due numeri, ottenendo (2,3), non abbiamo più le coordinate del punto P_1, bensì quelle del punto P_2.

Come rappresentare una funzione sul piano di Cartesio

Sono stati mostrati, prima, alcuni esempi di funzione. Ma come possiamo rappresentare una funzione? Sostanzialmente in tre modi: per mezzo

- di una tabella;
- di un'equazione;
- di un grafico.

Prima di vedere ciascuna di queste modalità, cerchiamo di capire meglio che cos'è una funzione. Formalmente una funzione *è una legge di corrispondenza tra due insiemi numerici. Una legge che, per ogni dato numero dell'insieme A, esiste uno ed uno solo numero dell'insieme B.*

Per esempio, non deve essere possibile che preso il numero 2 appartenente all'insieme A, a questo corrispondano due numeri dell'insieme B, per esempio 3 e 7. Questa, in base alla definizione, non è una funzione!

Ed ora vediamo la rappresentazione tabellare. La figura 6 illustra la rappresentazione tabellare verticale. Come la dobbiamo interpretare? Semplice: dato un numero dell'insieme X, ad esso corrisponderà uno ed un solo numero dell'insieme Y. Per esempio, ad x=0 corrisponderà y=0; oppure, ad x=2, corrisponderà y=6; e così via.

X	Y
0	0
1	3
2	6
...	...

Figura 6

X	0	1	2	...
Y	0	3	6	...

Figura 7

In figura 7, la stessa funzione ma rappresentata con una tabella orizzontale. Nella sostanza non cambia nulla.

Ed ora vediamo la stessa funzione rappresentata per mezzo di un'equazione.

$$y = 3 \cdot x$$

Come dobbiamo leggere questa espressione? *Per ottenere il valore di y, dobbiamo prendere il valore di x e moltiplicarlo per 3*. Facciamo qualche esempio. Dato il numero 0, dell'insieme x, quale sarà il suo corrispondente nell'insieme y? Sarà 0! Perché moltiplicando 3 per 0 otteniamo ancora 0.

Oppure, dato il numero 4, dell'insieme x, quale sarà il suo corrispondente nell'insieme y? Sarà 12. Perché moltiplicando 4 per 3 si ottiene 12. Non mi sembra difficile.

Ed ora vediamo la rappresentazione grafica della stessa funzione.

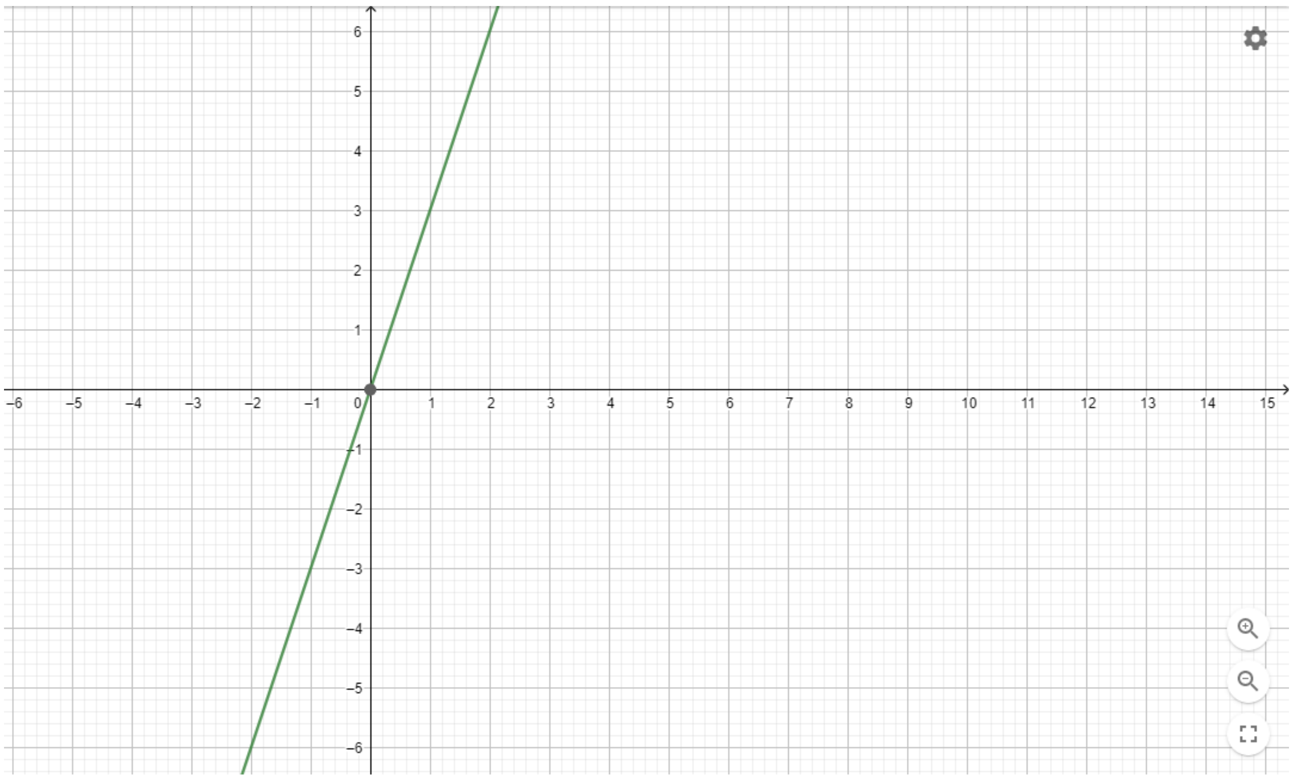


Figura 8

Si tratta di una retta o curva del primo ordine (i matematici la chiamano "curva", nonostante non sia curva!).

Si vede, ad occhio, che quando x=1 → y=3; e quando x=2 → y=6. Naturalmente è possibile chiedersi anche che valore assume la y nel caso x assuma un valore negativo. Per esempio, per x=-1, si può vedere, dal grafico, che y=-3.

C'è una modalità elettiva per la rappresentazione di una funzione?

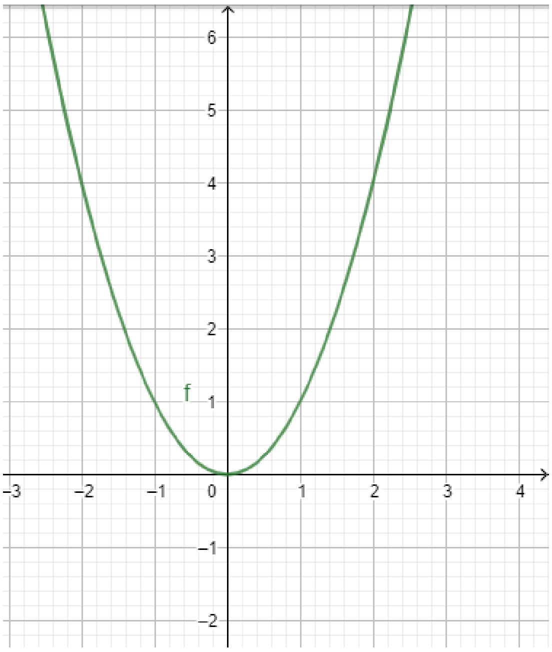
Dipende da ciò che ci serve. La tabella ci mostra direttamente i valori, come abbiamo potuto osservare. Ma non ce li può indicare tutti, dal momento che questi sono infiniti! Va bene quando si vuole focalizzare l'attenzione su un particolare gruppo di valori.

Anche il grafico non ci può mostrare tutti i valori, per la stessa ragione. Però ci mostra l'andamento della nostra funzione. Sicuramente ha un suo fascino. E poi, come spesso si dice, un'immagine vale più di mille parole!

L'equazione non ci mostra alcun valore, è vero. Però, è come se li comprendesse tutti. E' in grado di rispondere a tutte le nostre infinite domande (sulla funzione stessa, naturalmente). Per esempio, se ci chiediamo: "che valore assumerà la y se la x vale 1000?". Sarà sufficiente sostituire alla x il valore 1000 e poi moltiplicare per 3.

In qualche modo, si potrebbe anche affermare che è una forma di rappresentazione completa.

Vediamo qualche altro esempio di funzione.



Questa (figura 9) è una parabola, una curva del secondo ordine. L'equazione che descrive questa funzione è:

$$y = x^2$$

Figura 9

Mentre, in figura 10, vi è l'iperbole equilatera, di equazione:

$$y = \frac{1}{x}$$

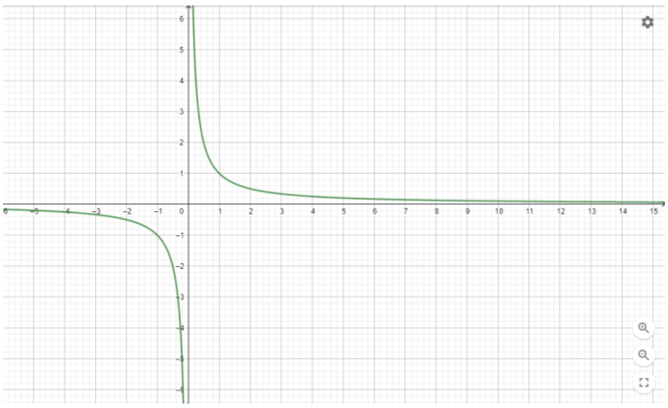


Figura 10

Bene, riflettete su quanto scritto. La prossima volta, finalmente, faremo conoscenza del concetto "derivata" di una funzione.

Alla prossima!