Funzioni e derivate (parte seconda)

Un po' di storia

Ed ora, come promesso, affrontiamo le derivate.

La derivata, come il limite e l'integrale, fanno parte di quell'area della matematica indicata, equivalentemente, come *analisi matematica* o *analisi infinitesimale*.

Furono Leibniz (filosofo e matematico francese, 1646-1716) e Newton (filosofo, fisico e matematico inglese, 1643-1727) che, indipendentemente l'uno dall'altro, posero le fondamenta di questa affascinante parte della matematica.

Leibniz fu mosso, principalmente, dalla necessità di calcolare l'area di figure piane che presentavano almeno un lato curvilineo. Facciamo un esempio. Nella prima parte di questo articolo, abbiamo visto la funzione parabola. Bene, ne ripropongo qui la rappresentazione cartesiana di tale funzione.

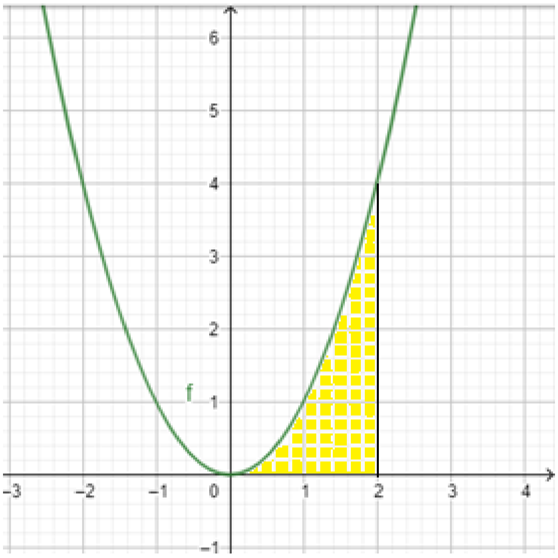

Figura 1

Supponiamo di voler calcolare l'area sottesa da questa curva, lungo l'asse delle x, tra 0 e 2. Per intenderci, quella evidenziata in figura con il color giallo. E' un problema che con la geometria piana tradizionale non possiamo risolvere. Si potrebbe pensare di usare la formula del triangolo (base per altezza diviso 2) dove la base è 2 e l'altezza è 4, pervenendo a 4, come risultato finale. Ma questo, sarebbe un risultato palesemente errato (in particolare per eccesso: sicuramente noterete che l'area di questo triangolo è maggiore della parte gialla della figura).

Ebbene, Leibniz voleva risolvere problemi di questo tipo! E, dopo aver percorso questa strada, arrivò al concetto di integrale. Noi, oggi, grazie a questa mente brillante, calcoliamo quell'area con un integrale definito (si dice "definito", per distinguerlo da un altro integrale che si dice "indefinito") nel seguente modo:

$$Area = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3} = 2{,}67$$

area che, come avevamo anticipato (e come ci conferma il calcolo), doveva - per ispezione visiva del grafico - essere inferiore a 4.

Sarebbe molto interessante ripercorrere il ragionamento che portò Leibniz alla definizione del concetto di integrale ma, ci vuole tempo e ci porterebbe fuori strada. Volevo, però, darvi almeno un'idea di che cosa è l'integrale e per quale ragione, storicamente, siamo giunti alla definizione di questo operatore.

E Newton? Che cosa tormentava questa personalità del mondo scientifico, anch'essa altrettanto brillante, che viveva oltre Manica?

Newton, che fondamentalmente era un fisico, era concentrato soprattutto sul problema del calcolo della velocità istantanea. Anche qui, proviamo a vedere la questione con un esempio.

Consideriamo il moto di un corpo capace di muoversi lungo un percorso rettilineo. In sostanza il corpo può andare solo avanti o indietro. E proviamo a rappresentare la sua posizione, rispetto ad un'origine (il punto di partenza) in funzione del tempo.

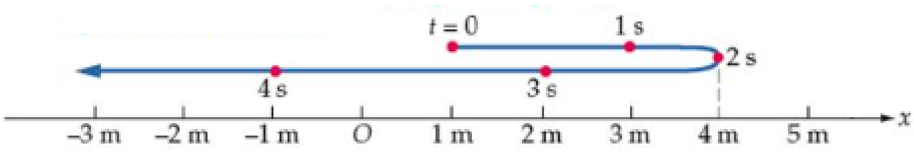

Figura 2

Proviamo ad interpretare la figura. All'istante iniziale, t=0, il corpo comincia a muoversi partendo da una posizione che è ad 1 metro di distanza dall'origine. Inizialmente si muove verso destra e, dopo 1 secondo (1s), ha percorso 3 metri (3m). Bene, come interpretare il pallino rosso in corrispondenza del quale vi è scritto 2s? Significa che dopo 2 secondi si trova a 4 metri dall'origine. Questo significa due cose: che nell'ultimo intervallo di 1 secondo, essendosi spostato da 3m a 4m ha percorso la distanza di 1 metro. Ma significa anche che dal momento in cui è partito (t=0), si è mosso complessivamente di 4m nel tempo di 2 secondi.

Il lettore, a questo punto, non dovrebbe avere difficoltà ad interpretare l'intera figura.

Ora, però, questo modo di descrivere il movimento di un corpo non è molto comodo. Si preferisce, allora, introdurre il grafico spazio-tempo, del moto del nostro corpo, come mostrato in figura 3.

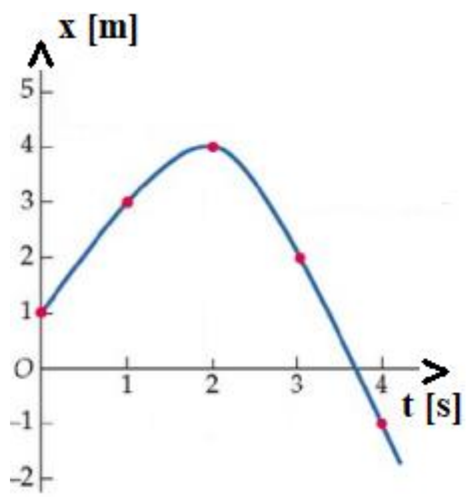

Figura 3

E che cos'è il grafico spazio-tempo? E' una funzione. In particolare, su questo grafico, rappresentiamo l'andamento della posizione x del corpo, espressa in metri, rispetto al trascorrere del tempo t, espresso in secondi. Proviamo a fare qualche lettura del grafico. Il primo pallino rosso, quello sull'asse delle ordinate (l'asse verticale) in corrispondenza della tacca 1, che significa? Che all'istante t=0, cioè quando ha inizio il movimento del corpo, questi si trova ad un metro di distanza dall'origine. Il terzo pallino rosso, sulla curva procedendo verso destra, ci dice che il corpo si trova ad una distanza di 4m quando sono trascorsi, complessivamente, 2s. Poi, continuando ad ispezionare la curva che cosa si può osservare? Che dopo 3s il corpo si trova a 2m dall'origine. E questo vuol dire che il corpo è tornato indietro. E, nel punto in cui attraversa l'asse delle ascisse (quello orizzontale, fra 3s e 4s), il corpo si troverà proprio nel punto che abbiamo denominato origine. E, a 4s, il corpo si troverà a -1m: "meno un metro", vuol dire che si trova nella direzione opposta rispetto a quella che aveva preso inizialmente. Insomma, se all'inizio ha cominciato a muoversi verso destra, successivamente ha invertito la direzione per procedere verso sinistra.

Ora, cerchiamo di capire meglio l'utilità di questo grafico.

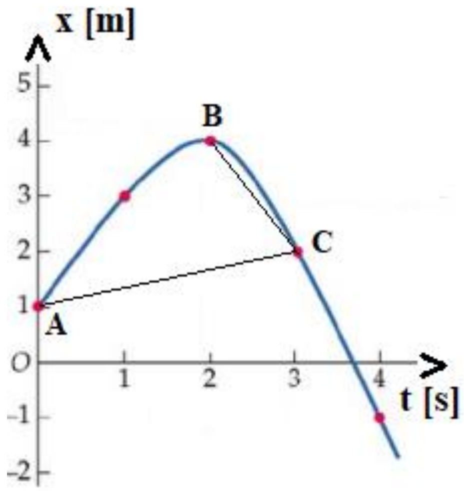

Figura 4

Analizziamo il movimento del corpo dal punto A al punto C di figura 4. Che cosa possiamo dire? Che da t=0s a t=3s (ovvero un intervallo di tempo di 3s) il corpo si è mosso da 1m a 2m. Se facciamo il rapporto tra questi due intervalli otteniamo la velocità media. Vediamolo in formula:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{2-1}{3-0} = \frac{1}{3} = 0{,}33\ m/s$$

Dove il simbolo Δ (leggi "delta"), che è una lettera maiuscola dell'alfabeto greco, è usato in fisica per indicare un intervallo o una variazione di una grandezza. E si calcola facendo la differenza tra il valore finale di tale grandezza e quello iniziale.

Cerchiamo di interpretare bene quella formula. Il corpo, come ormai dovrebbe essere chiaro, è capace di muoversi lungo una strada rettilinea solo in due direzioni: diciamo verso destra o verso sinistra. Su questa strada c'è una bella tacca, un riferimento, che rappresenta l'origine. Cioè da dove contiamo i metri verso destra – per convenzione positivi – e verso sinistra, negativi. Ora, dalla sola conoscenza dei punti A e C noi cosa possiamo dire? Cosa sappiamo? Che all'istante t=0s, il corpo si trova in una posizione che è ad 1m di distanza dall'origine verso destra. E che all'istante t=3s, il corpo si trova in una posizione che è a 2m di distanza dall'origine verso destra. In conclusione affermiamo che il corpo, in questo preciso intervallo di tempo, tre secondi, si è mosso di un metro. La sua velocità media è stata di 0,33 metri (di spostamento) per ogni secondo di tempo trascorso. Ma non sappiamo che cosa è successo all'interno di questo intervallo di tempo. O meglio, lo sappiamo solo se guardiamo il grafico.

Tutto questo, per dire cosa? Che la velocità media ci dice sicuramente qualcosa, ma non ci racconta tutta la storia. E' una grandezza utile ma, a volte, ci può portare fuori strada. Facciamo un altro esempio. Supponiamo di viaggiare con la nostra auto su una strada rettilinea e di percorrere 120 km in tre ore. La nostra velocità media, quindi, è di 40 km/h. Ma questo non significa che siamo andati sempre a questa velocità. Probabilmente avremo toccato anche le velocità di 50 km/h, o forse 60 km/h e, certamente, la nostra velocità sarà stata nulla quando ci siamo fermati alla stazione di servizio. Per avere una rappresentazione più accurata del nostro viaggio occorrerebbe fare una media su intervalli di tempo più piccoli. Per esempio, potremmo fare una media ogni mezz'ora, oppure ogni 5 minuti o, anche, ogni minuto. Addirittura ogni secondo. L'ideale sarebbe conoscere la *velocità istantanea*. Una velocità che si modifica ogni istante. Dove per istante intendiamo un intervallo di tempo molto piccolo. Un intervallo di tempo così piccolo da essere quasi nullo. Come calcolare tale velocità? Ecco, questi erano i pensieri che, a quel tempo, popolavano la mente del nostro Isaac Newton. Pensieri che poi, sulla scia dei ragionamenti che abbiamo appena accennato, lo condussero verso la nascita del concetto di derivata.

Che cosa intendiamo per pendenza?

Prima di enunciare la definizione di derivata occorre rinfrescare il concetto di pendenza. Tutti noi, certamente, possediamo la nozione di pendenza. Quando pensiamo, ad esempio, ad un piano inclinato, oppure al pavimento di un terrazzo sul quale l'acqua non deve ristagnare. Oppure quando, in montagna, incontriamo un segnale stradale come quello illustrato in figura 5.

Figura 5

Che cosa significa una pendenza del 20%? Immaginiamoci in montagna mentre ci godiamo una bella passeggiata. Supponiamo di partire dal punto O (origine) e di arrivare al punto Q (quota). Supponiamo anche che, se ci fossimo mossi lungo l'orizzontale, avremmo percorso un tratto di lunghezza L. Ebbene, diciamo che abbiamo affrontato una pendenza del 20% se, per uno spostamento, lungo l'orizzontale, di L metri, perveniamo ad una quota che si trova più in alto rispetto al punto O, lungo la verticale, del 20% della lunghezza L. Facciamo un esempio numerico. Se, per una distanza lungo l'orizzontale di 100 metri, saliamo fino ad una quota di 20 metri rispetto al punto di partenza, allora la pendenza sarà del 20%.

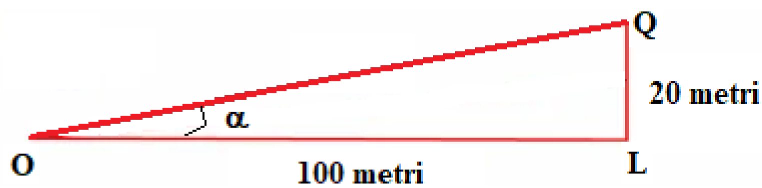

Figura 6

I matematici preferiscono esprimere lo stesso concetto con un angolo, generalmente espresso in gradi, detto angolo di salita. In riferimento alla figura 6, è l'angolo in O, compreso tra i segmenti OL ed OQ. Angolo che conveniamo di indicare con α (alfa, altra lettera – minuscola – dell'alfabeto greco). Come lo calcoliamo questo angolo? Dobbiamo rispolverare un po' di trigonometria e ricordare che, *dato un triangolo rettangolo, la tangente trigonometrica di un angolo (non quello retto) è il rapporto tra il cateto opposto a tale angolo e quello adiacente*. Vediamolo in formula:

$$tg\ \alpha = \frac{\overline{QL}}{\overline{OL}}$$

(permettetemi una digressione: notate la potenza, e la bellezza, della matematica: in modo molto compatto è in grado di esprimere concetti che, altrimenti, occorrerebbero uno o più periodi per definirli!).

Allora, questo angolo α, come lo calcoliamo? Con l'operazione inversa della tangente, l'arcotangente. Quella funzione che nelle calcolatrici scientifiche, per intenderci, è associata ad un tastino sul quale vi è riportato $\tan^{-1}$).

Facciamo il calcolo:

$$\alpha = arctg\ \frac{\overline{QL}}{\overline{OL}} = arctg\ \frac{20}{100} = arctg\ 0{,}2 = 11{,}31°$$

Quindi, una pendenza del 20% equivale ad un angolo di salita di poco più di 11°.

Il concetto di derivata

Bene, direi che possiamo, finalmente, affrontare il concetto di derivata. Allora, partiamo dalla definizione geometrica (formale) che è poi quella che più ci può interessare. *La derivata di una funzione, in un punto, è il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione in quel punto*. Scritta così, può sembrare un po' criptica ma, nessun timore, cerchiamo di capirci qualcosa.

Allora, cominciamo col prendere una funzione. Ancora una parabola (figura 7).

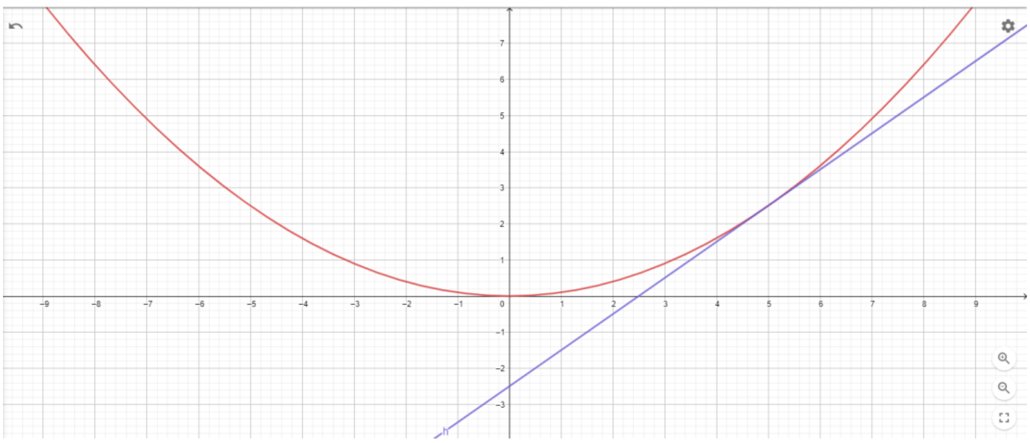

Figura 7

Allora, che cos'è la derivata di questa curva? Fermi tutti, la domanda è mal posta! Se rileggiamo con attenzione la definizione, dobbiamo indicare in quale punto vogliamo calcolare la derivata. Questo aspetto non è trascurabile ma è importante e ci torniamo tra poco.

Diciamo che il punto scelto è quello di ascissa x=7. Ora, da tale punto sull'asse delle ascisse, saliamo su in verticale, fino ad incontrare la nostra curva e, nel punto di contatto facciamo passare la retta tangente (vedi figura 8). Il coefficiente angolare di questa retta, è proprio il valore della derivata cercata.

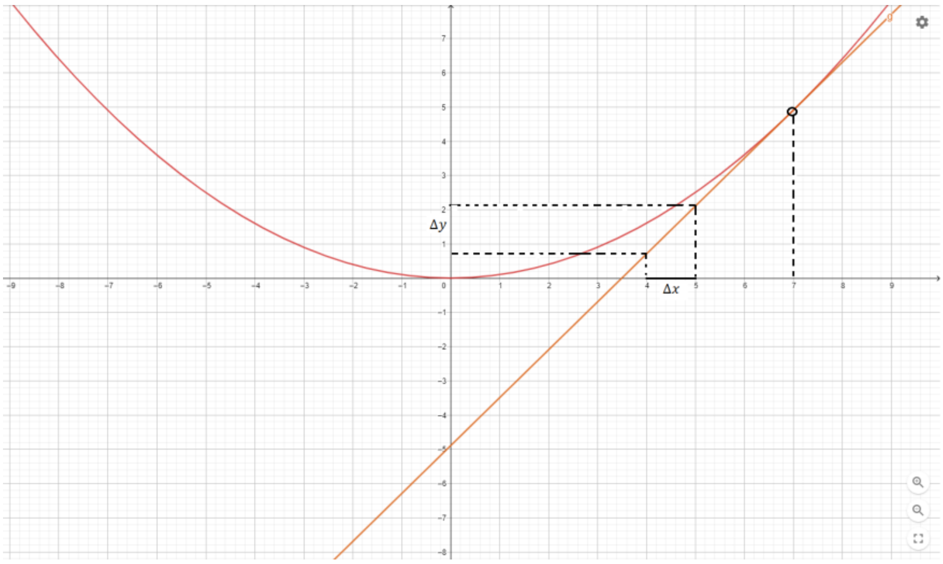

Figura 8

Ora, come lo troviamo il coefficiente angolare di questa retta? Qui, se non ve lo ricordate, dovete credermi sulla fiducia! Ecco la formula:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Operativamente, significa questo: prendo un intervallo (a piacere, non ha importanza dove e quanto grande tale intervallo) sull'asse delle x, e questo è il Δx, e poi vado a vedere qual è il corrispondente Δy. E poi faccio il rapporto. Visto che la variazione Δx posso sceglierla come desidero, allora decido di considerare l'intervallo che ha come estremi i punti x_1=4 ed x_2=5. Poi, riporto questi due punti sulla retta tangente e li proietto sull'asse verticale ottenendo Δy. Trovo y_1=0,7 ed y_2=2,1 (non vi preoccupate se non leggete in modo accurato sull'asse verticale; non li leggo nemmeno io! Ma li ho calcolati per via analitica e sono più che esatti). Allora, siamo pronti per il calcolo di m, ovvero del coefficiente angolare:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2{,}1 - 0{,}7}{5 - 4} = 1{,}4$$

E questo è il valore della derivata. Ma cosa significa geometricamente? Ora, anche qui, se non ve lo ricordate, dovete fidarvi di me. Si dimostra che il coefficiente angolare di una retta è la tangente trigonometrica dell'angolo che tale retta forma con l'asse delle ascisse. Ovvero, in formula:

$$m = tg\alpha = 1{,}4$$

Quindi, passando all'arcotangente, possiamo calcolare il valore di questo angolo.

$$\alpha = arctg\ 1{,}4 = 54{,}46°$$

Siamo in dirittura d'arrivo. La derivata di una funzione in un punto, quindi, che informazioni ci da? Ci dice qual è la pendenza di quella funzione in quel punto. Nel nostro caso, avevamo scelto il punto x=7. E se cambiamo punto? Evidentemente cambierà il valore della derivata in quanto cambierà la pendenza della funzione in quel nuovo punto. Ad esempio, se scegliamo il punto x=5, avremo una pendenza maggiore o minore? Prima di leggere oltre, provate a riflettere ed a tentare di rispondere.

La pendenza sarà minore e, vi evito i calcoli, in questo caso corrisponderà a 45°.

Quindi, in conclusione, se dobbiamo calcolare (graficamente) la derivata di una funzione in un punto, diciamo P, che dobbiamo fare? Dovremo eseguire i seguenti step:

1. disegnare la retta tangente alla curva nel punto P;
2. calcolare (sempre graficamente) il coefficiente angolare di tale retta tangente;
3. da quest'ultimo, con l'aiuto dell'arcotangente, calcolare l'angolo che questa retta forma con l'asse delle ascisse.

Nel prosieguo del cammino che stiamo percorrendo assieme, vedremo spesso all'opera l'applicazione di questo algoritmo per il calcolo di una derivata.

Un'ultima cosa, che ci tornerà spesso utile, è la seguente: è possibile che la funzione che stiamo studiando presenti, in alcuni punti, derivata nulla. Ma cosa significa derivata nulla? Vuol dire che in quei punti la retta tangente forma con l'asse delle x un angolo nullo. O, che è la stessa cosa, è parallela all'asse delle ascisse. Ebbene, si tratta di punti molto importanti nello studio di una funzione: sono i punti di massimo e di minimo. In realtà anche i punti di flesso orizzontale presentano derivata nulla.

Vediamo un esempio. La figura 9 mostra una funzione che presenta un massimo e due minimi. Il massimo è nell'origine, ovvero per x=0. Ed i minimi sono in corrispondenza delle ascisse:

$$x = \sqrt{\frac{20}{3}} \cong 2{,}58 \quad e \quad x = -\sqrt{\frac{20}{3}} \cong -2{,}58$$

In ciascuno di questi tre punti la derivata è nulla.

Ora, che cosa accade alla funzione prima di arrivare al punto di massimo? Ebbene, se ci riflettete un momento, dovreste convenire con me che la funzione sta crescendo! E dopo? E dopo la funzione comincerà a decrescere. E cosa accade alla funzione prima di arrivare ad un punto di minimo? Anche qui, rifletteteci e concluderete che la funzione sta scendendo. E dopo? E dopo risalirà.

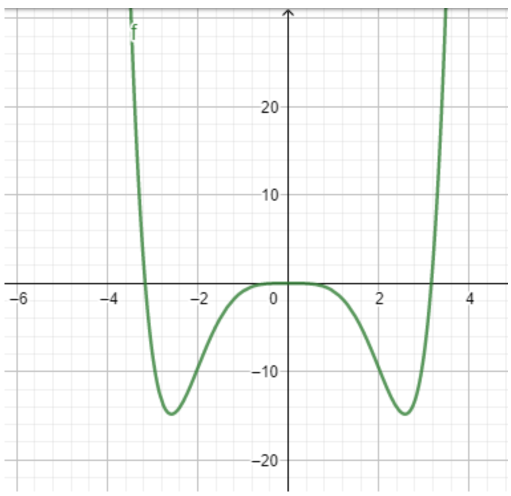

Figura 9

La figura 10, invece, mostra una funzione con un flesso orizzontale ascendente, per x=0.

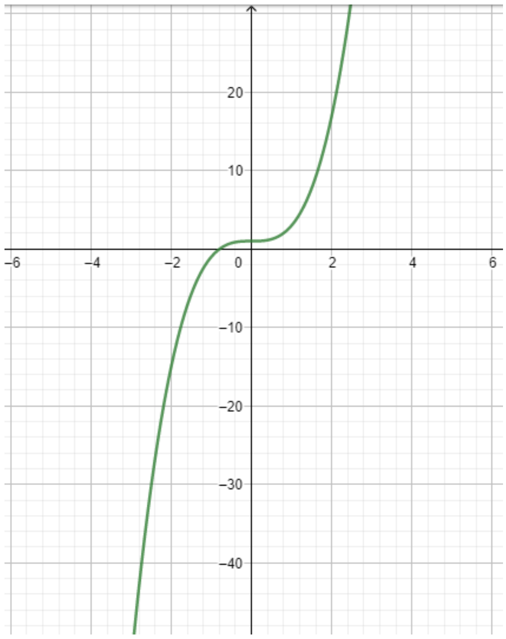

Figura 10

Il flesso è come una pausa: la funzione, prima del flesso, cosa sta facendo? Sta salendo. E dopo? E dopo riprende a salire. Ecco perché, scrivevo, il flesso lo possiamo considerare come un momento di pausa che la funzione si sta prendendo.

Non faccio l’esempio ma, come potete immaginare, esistono anche i flessi orizzontali discendenti. In quei casi la funzione scende, fa una pausa, e poi riprende a scendere.

Bene! A questo punto siamo pronti per affrontare lo studio delle greche e …

… ma che cos’è questo suono? Ah, è la campanella, che ci segnala che l’ora è finita.

E allora? E allora alla prossima e buon studio!