# Funzioni e derivate (parte terza)

C'è ancora qualcosa che vi devo dire, a proposito delle derivate, prima di affrontare l'argomento "greche delle opzioni".

## Il significato analitico della derivata

Nell'articolo precedente abbiamo affrontato il significato geometrico della derivata. Abbiamo avuto modo di sapere che, geometricamente, la derivata ci da informazioni sulla pendenza di una funzione. Ora, dobbiamo cercare di capire il significato analitico della derivata. Ma cosa intendo dire con questa espressione?

Prendiamo sempre l'equazione della parabola (alla quale, oramai, ci siamo affezionati). Eccola qui:

$$y = x^2$$

Fare la derivata di questa funzione – in senso analitico intendo – significa fare la seguente operazione:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Prima di tutto, diamo uno sguardo alla simbologia. L'espressione:

$$\frac{dy}{dx}$$

significa proprio "la derivata di y rispetto ad x". Il simbolo "d" sta per differenziale e rappresenta, appunto una differenza tra due valori della y. Potremmo dire anche la variazione della y. E, se ricordate, la variazione l'abbiamo indicata con Δ:

$$\Delta y = y_f - y_i$$

"valore finale della y meno il valore iniziale della stessa". Ora, quando questa differenza diventa molto piccola, differenza che in tal caso i matematici dicono "infinitesimale", il simbolo delta viene sostituito con la lettera minuscola "d". Quindi, "dy", significa una differenza molto piccola della variabile y. E, analogamente, "dx" significa una differenza infinitesima della variabile x. Quindi la derivata, è il rapporto tra due variazioni infinitesimali.

Ora, torniamo alla nostra parabola. Abbiamo detto che fare la derivata di quella funzione, significa pervenire all'espressione:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Ma questa, è un'altra funzione! Quindi, derivare una funzione significa ottenere un'altra funzione. E qual è il significato di questa funzione? E' sempre quello che abbiamo visto la scorsa volta: la pendenza della funzione primaria. Solo che, nell'articolo precedente, calcolavamo la pendenza in un punto. Ora, è come se l'avessimo calcolata per infiniti punti! Vediamo se con un esempio numerico riesco a spiegarmi meglio.

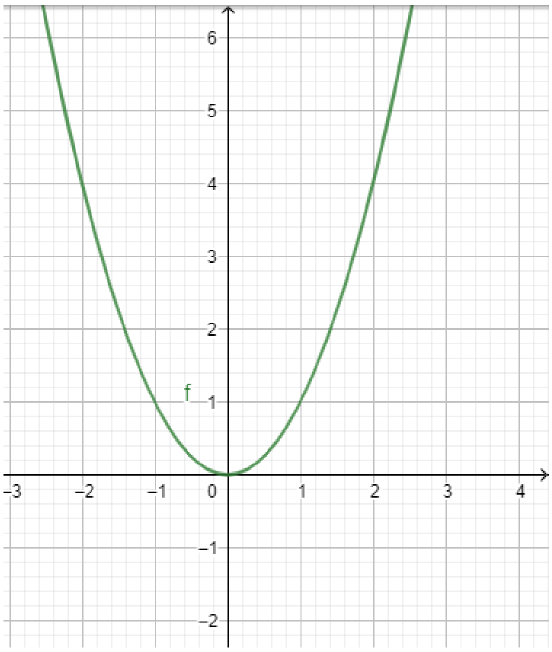


**Figura 1**

In figura 1 abbiamo il grafico della nostra parabola. Ed in figura 2 il grafico della sua derivata, y=2x.

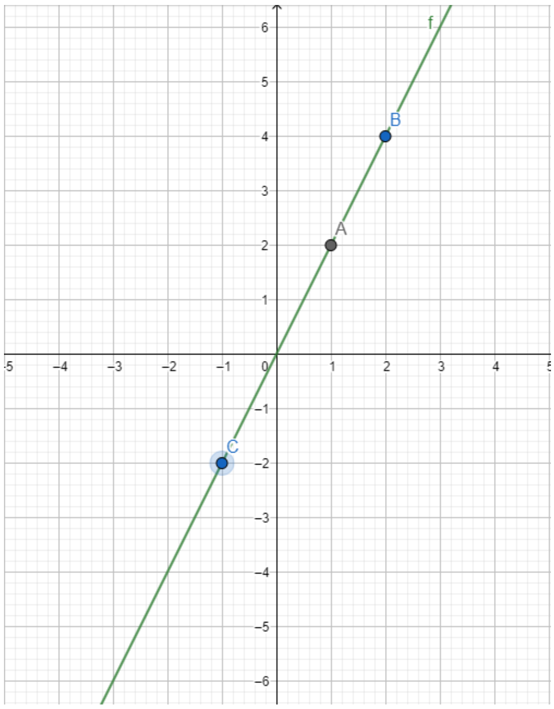


**Figura 2**

Sempre nella figura 2, ho evidenziato alcuni punti. Nel punto A, di ascissa x=1, la nostra funzione vale 2 (basta sostituire ad x il valore 1 nell'espressione y=2x). Che cosa significa questo valore? Che la pendenza della nostra parabola, nel punto x=1, vale 2. Ovvero, forma un angolo con l'asse orizzontale di:

$$\alpha = arctg\ 2 = 63°$$

circa 63°.

E nel punto B? E' sufficiente ripetere il ragionamento. Nel punto B la nostra retta assume il valore y=4. Ciò significa che la parabola, in tal punto, forma con l'asse delle ascisse l'angolo:

$$\beta = arctg\ 4 = 76°$$

E nel punto C? A questo punto, dovremmo aver capito:

$$\gamma = arctg\ (-2) = -63°$$

Un angolo negativo? Vuol dire che la pendenza, in quel punto, è negativa! Vediamo tutto ciò con il grafico della parabola e gli angoli (leggi: "alfa", "beta" e "gamma") appena calcolati delle pendenze, di tale parabola, in quei punti.

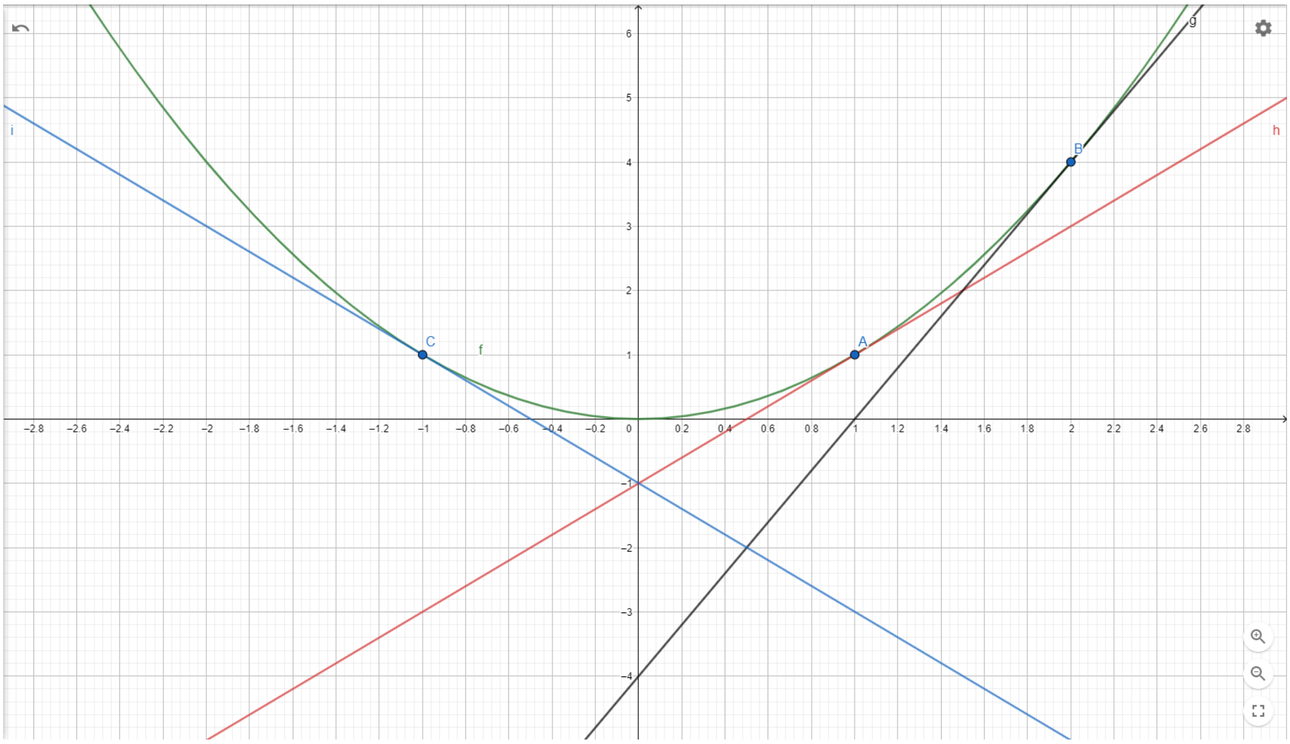


Figura 3

La forma della parabola appare diversa da quella illustrata nella figura 1: è semplicemente perché ho cambiato la scala per poter apprezzare meglio le tre rette tangenti ai punti A,B e C.

Osserviamo che la retta **h**, quella rossa, forma un angolo con l'asse delle x che è minore di quello formato dalla retta **g** (quella nera). Il primo, come abbiamo calcolato, è di 63° circa ed il secondo, circa 76°.

La retta **i**, come si può notare, è discendente e ciò significa una derivata negativa, ovvero una pendenza (e quindi un angolo) negativa[1].

Dovremmo, a questo punto, aver compreso il significato analitico di derivata.

[1] Più correttamente l'angolo in questione è di 117° circa, positivo. Qui bisognerebbe affrontare meglio le caratteristiche della funzione tangente (intendo quella trigonometrica) ed in particolare la sua periodicità. Ma il discorso ci porterebbe troppo lontano. E' sufficiente che il lettore, a questo punto, abbia compreso che nel punto C (x=- 1) la pendenza della parabola è negativa.

## Le funzioni che dipendono da due o più variabili

Le funzioni che abbiamo sin qui considerato sono tutte funzioni di una sola variabile. Infatti, la scrittura:

$$y = f(x)$$

significa che y è funzione della variabile x, e solo di quella. Se invece avessimo una funzione che dipende da due variabili, allora scriveremmo:

$$z = f(x, y)$$

Intendendo, con tale scrittura, che la funzione z dipende dalle variabili x ed y. Per esempio, in fisica, il volume occupato da un gas dipende sia dalla pressione che dalla temperatura alle quali si trova il gas.

Oppure, in economia, potremmo immaginare il prezzo di un oggetto che dipende, oltre che dall'oggetto stesso, dall'età dell'acquirente (come fanno, ormai da un po' di tempo a questa parte, alcuni supermercati che scontano la spesa del 10% a tutti coloro che hanno un'età superiore a 65 anni).

Rappresentare graficamente una funzione di due variabili è un po' più complicato. Si usa un riferimento cartesiano nello spazio con tre assi: due per le variabili indipendenti, x ed y, ed il terzo per la funzione stessa (spesso indicata come "quota").

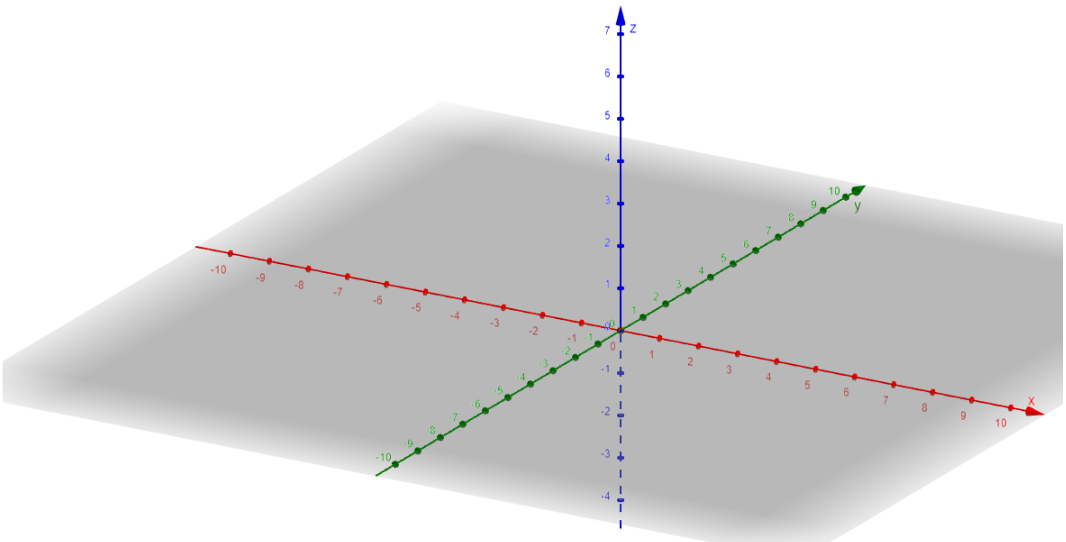


**Figura 4**

In figura 4 ho riportato tale riferimento: notate gli assi x (rosso) ed y (verde) e l'asse della funzione, quello verticale (blu), indicato con z.

Facciamo un esempio. Consideriamo la funzione:

$$z = x^2 + y^2$$

Cosa vuol dire rappresentare graficamente tale funzione? Significa dare a z un valore per ognuna delle infinite coppie di valori delle variabili x ed y. Riportiamo, in tabella, solo alcuni di questi valori.

| x | y | z |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 5 |

I valori di z sono stati ottenuti nel modo consueto: ad esempio, sostituendo ad x il valore 1 e ad y il valore 2 (quinta riga della tabella) si ottiene:

$$z = 1^2 + 2^2 = 5$$

E così via per tutti gli altri. E quando lo facciamo (idealmente) per tutte le infinite coppie, che cosa otteniamo graficamente?

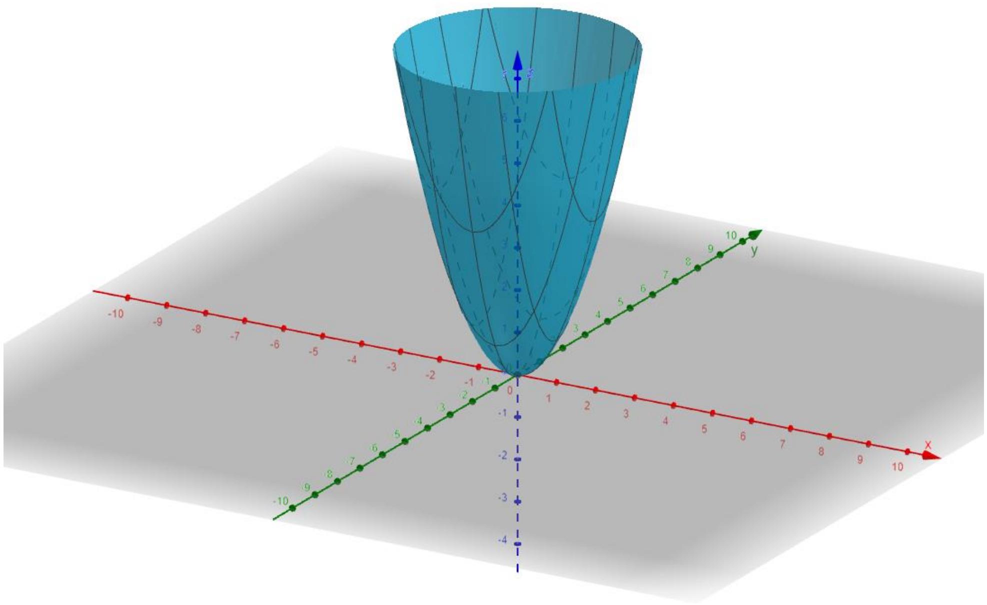

**Figura 5**

Nel caso della nostra funzione otteniamo il grafico mostrato in figura 5: si tratta di un paraboloide (ellittico, per l'esattezza). Ma, a parte il nome, si osserva un grafico, in questo spazio tridimensionale, che ci ricorda la parabola (nel piano).

E se una funzione dipende da più di due variabili (come il prezzo di un'opzione)? La si può ancora trattare, analiticamente, ma non la si può rappresentare graficamente: lo spazio di cui noi abbiamo esperienza è quello tridimensionale ed è quello che possiamo rappresentare graficamente.

## Derivare una funzione di due o più variabili

Che cosa significa fare la derivata di una funzione di due o più variabili? Innanzitutto dobbiamo decidere rispetto a quale variabile stiamo derivando la nostra funzione. Ad esempio, la derivata della funzione:

$$z = f(x, y)$$

rispetto ad x, nel punto di coordinate (a,b), si scrive in questo modo:

$$\frac{\partial z}{\partial x}$$

denominandola: derivata parziale di z rispetto ad x. Geometricamente è sempre una pendenza, come nel caso delle derivate di funzioni di una sola variabile. In particolare è la pendenza della funzione che si ottiene intersecando la z con il piano y=b, nel punto x=a.

Sembra un po' complicato? Niente paura e cerchiamo di vederlo con un esempio. Intanto, cerchiamo di capire perché, nello spazio, l'equazione:

$$y = b$$

rappresenta un piano.

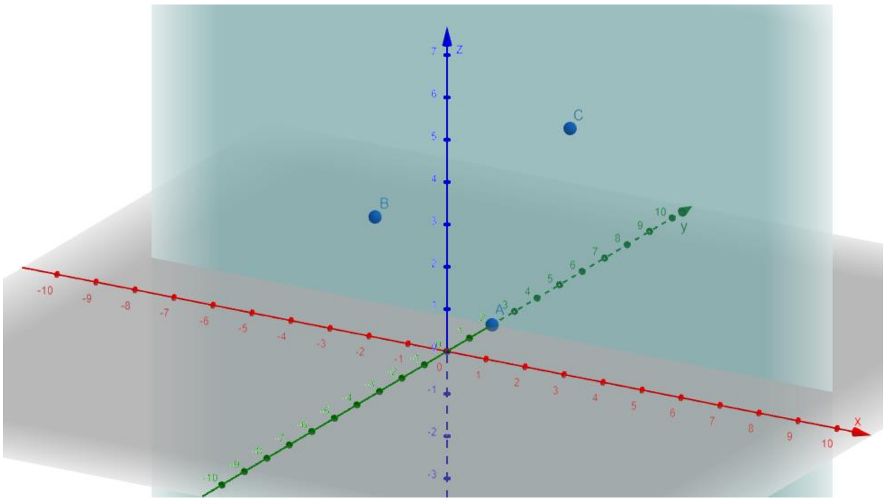


Figura 6

In figura 6 ho riportato il piano di equazione y=2. Perché, scrivevo, questa equazione rappresenta, nello spazio, proprio un piano? Noterete anche la presenza di 3 punti: A, B e C che giacciono tutti sullo stesso piano. Ora, un punto P nello spazio, ha coordinate:

$$P = (x, y, z)$$

ed i tre punti mostrati in figura 6 hanno coordinate:

$$A = (0,2,0) \qquad B = (-3,2,2) \qquad C = (2,2,5)$$

si potrà osservare che la coordinata y, per ciascuno dei tre punti, è sempre uguale a 2. Quindi, y=2 è l'insieme di tutti i punti dello spazio che hanno coordinata y=2. Se ci pensate un momento, tutti questi punti formano un piano.

Ed ora riprendiamo la funzione:

$$z = x^2 + y^2$$

ed immaginiamo di volerla derivare nel punto (x,y)=(2,1).

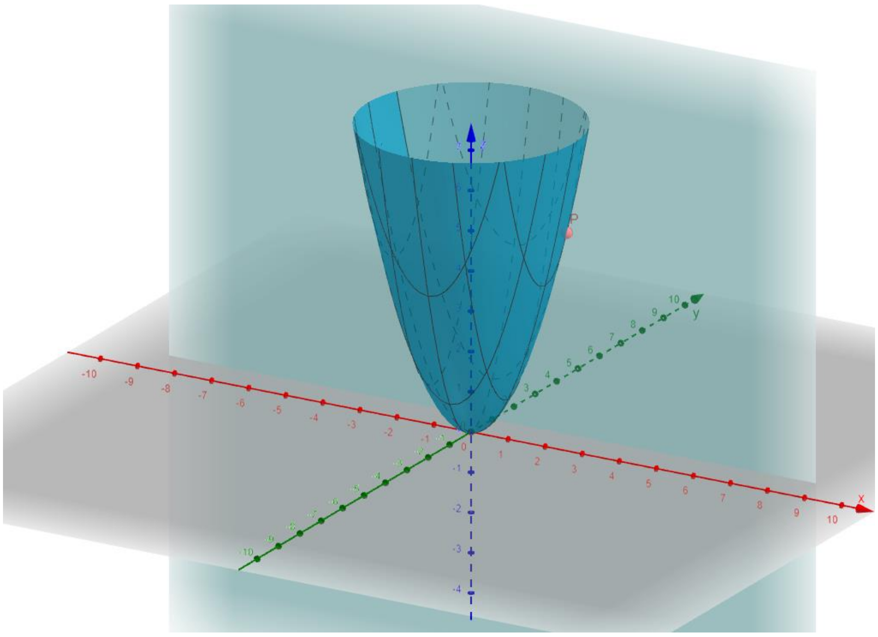

Figura 7

La figura 7 mostra la funzione z, il piano y=1 ed il punto P (2,1,5). L'intersezione della funzione z con il piano y=1 ci restituisce una funzione nel piano (x,z). E di che funzione si tratta? Analiticamente la scriviamo così:

$$z = x^2 + 1$$

(abbiamo sostituito ad y il valore 1) ed il grafico è quello rappresentato in figura 8.

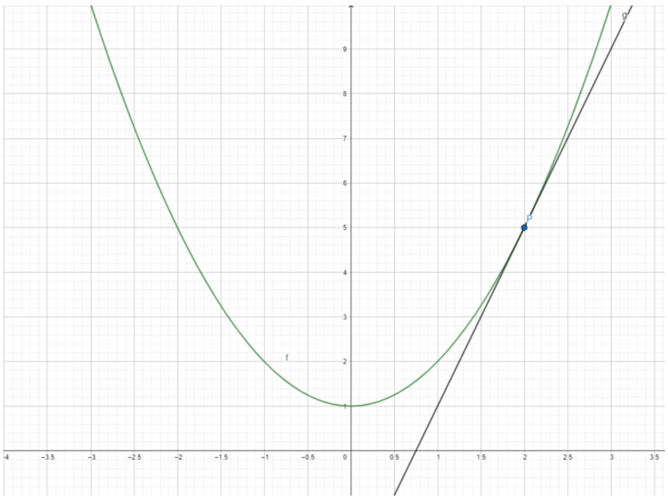

Figura 8

Ed ora ritengo che ci siamo e possiamo spiccare il volo verso le greche delle opzioni. Se dovesse occorrere qualche altra nozione di matematica, la richiameremo nel momento in cui ci servirà.

A proposito, per chi volesse avere un'idea … "dinamica" del concetto di derivata parziale, può divertirsi con il video che trovate a questo link:

https://www.youtube.com/watch?v=pp6ZYDqrVNg

Buon studio a tutti.