

# Delta e gamma (parte prima)

---

Ed eccoci, finalmente, a dissertare di greche.

Ho deciso di partire dal delta, e a seguire col gamma, perché sono le prime greche con le quali il neofita comincia a prendere confidenza quando si avvicina al mondo affascinante delle opzioni. La maggior parte dei neopzionisti, infatti, si è già confrontata con il trading trattando strumenti lineari (azioni e future). Quando si acquista uno strumento lineare, si sa che se il prezzo cresce si guadagna e se il prezzo scende si perde, se lo si vende è il contrario. E allora, dopo aver imparato che comprando una call ci si mette a favore della crescita del relativo sottostante e, comprando una put, si guadagnerà solo se questo scende, si impara anche che se si compra una call strike 14.000, con il sottostante a 14.000, l'entità del guadagno sarà diversa rispetto ad aver acquistato una call strike 14.200 piuttosto che 13.800. Ed ecco che, inevitabilmente, il nostro neofita opzionista comincerà a fare la conoscenza del delta. Ma, calma e gesso ed andiamo con ordine.

## Un po' di simbologia

Introduciamo, dapprima, la necessaria simbologia che ci occorrerà per indicare le equazioni che a breve andremo a scrivere. Simbologia che ci accompagnerà anche nel corso dei successivi articoli. Uso quella di John C. Hull<sup>1</sup>, l'accademico di riferimento nell'ambito dei mercati finanziari di futures ed opzioni, in quanto la ritengo abbastanza esplicativa.

Indichiamo con:

**S<sub>0</sub>**: il prezzo corrente del sottostante;

**K**: il prezzo di esercizio (o strike);

**T**: la vita residua del contratto;

**σ**: la volatilità implicita (leggi: "sigma");

**r**: il tasso di interesse privo di rischio;

**D**: i dividendi attesi durante la vita dell'opzione;

**c**: il prezzo corrente della call;

**p**: il prezzo corrente della put.

## Definizione di delta

Di questa greca si possono dire diverse cose e, nel corso di questo e dei prossimi articoli, le andremo ad esaminare tutte.

Prima di tutto, però, occorre darne una definizione formale. **Il delta di un'opzione è la derivata parziale prima del prezzo della stessa rispetto al sottostante.** In simboli, nel caso di una call, scriveremo:

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}$$

---

<sup>1</sup> J.C.Hull, Fondamenti dei mercati di futures e opzioni, Pearson

dove il delta è stato indicato con la lettera greca delta maiuscola ( $\Delta$ ).

Delle derivate abbiamo avuto modo di parlare nei precedenti articoli e, pertanto, questa definizione dovrebbe essere più che sufficiente per farci capire cosa sia il delta. Ma se vogliamo renderla ancora più fruibile – diciamo così – potremmo affermare che il delta di un'opzione è il rapporto tra la variazione del prezzo dell'opzione e la variazione del prezzo del sottostante.

### Delta di una call

Facciamo subito un esempio tratto dalla realtà. Consideriamo una call 14.800, scadenza giugno 2022, scritta sul sottostante Dax. Apro la piattaforma e vedo che oggi, 3 giugno 2022, vale 59,5 punti quando il sottostante vale 14.442. Poi, osservo un apprezzamento del sottostante che si porta a 14.542 e, in corrispondenza di tale valore, registro la quotazione della call che si è portata a 82,5 punti. Calcolo il delta:

$$\Delta \cong \frac{(c_f - c_i)}{(S_f - S_i)} = \frac{(82,5 - 59,5)}{(14.542 - 14.442)} = \frac{23}{100} = 0,23 = 23\%$$

dove si è indicato con  $c_f$  e  $c_i$ , rispettivamente, il valore finale ed iniziale del prezzo della call; e con  $S_f$  ed  $S_i$ , sempre rispettivamente, il valore finale ed iniziale del sottostante.

Ora attenzione: avrete notato che nel calcolo, dopo il simbolo del delta, ho indicato il segno  $\cong$  (circa uguale). Perché? Perché questo calcolo ci restituisce un valore medio del delta e non il delta puntuale. Infatti, come avremo modo di osservare più avanti, il delta di un'opzione non è costante al variare del sottostante ma varia con esso.

Ma torniamo a noi. Come potete notare, il calcolo del delta è stato effettuato applicando la seconda definizione. Ovvero, abbiamo osservato una certa variazione del sottostante (da 14.442 a 14.542) e, in corrispondenza di essa, abbiamo registrato la variazione del prezzo della call. Poi abbiamo fatto il rapporto tra queste due variazioni.

Ed ora proviamo a fare il calcolo in modo più preciso, usando proprio la formula della derivata. Usiamo le funzioni del foglio excel che ho messo a disposizione e calcoliamo il delta dell'opzione quando il sottostante si trova a 14.442. Troviamo 0,222, ovvero il 22,2%. Abbastanza vicino al valore del delta medio.

Ed ora cerchiamo di capire qualcosa di più di questa greca, esaminando il grafico dell'AtNow della call che stiamo esaminando, riportato in figura 1.

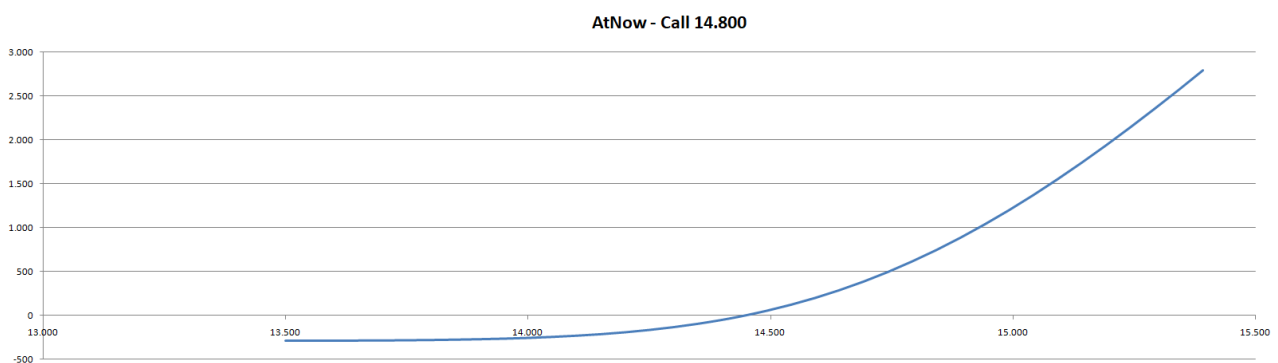
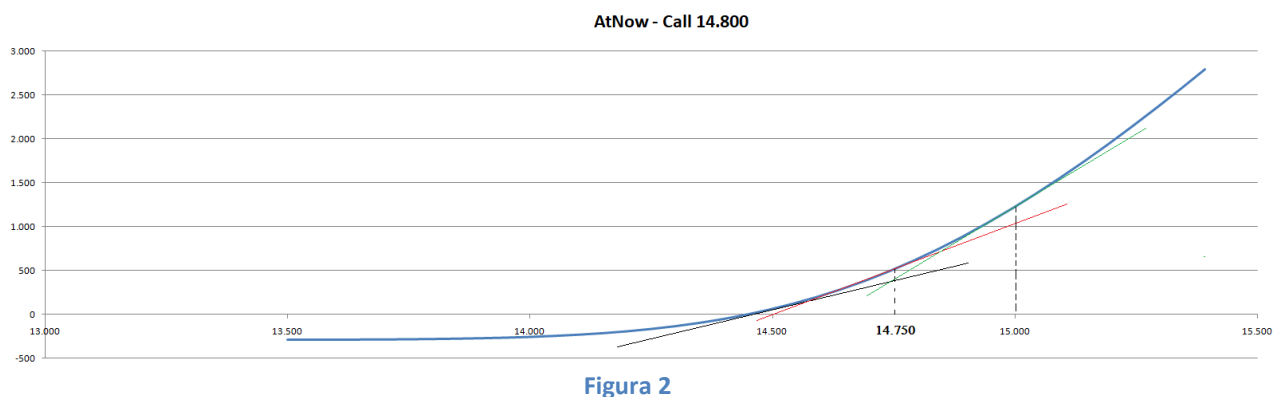


Figura 1

Abbiamo detto che la derivata di una funzione, in un punto, rappresenta la pendenza di quella funzione nel punto considerato. Ora, qual è la funzione, nel nostro caso? E' il prezzo dell'opzione (che abbiamo indicato

con c). E la variabile indipendente (quella che i matematici amano indicare con x)? E' il sottostante (indicato con S). Ma allora stiamo parlando proprio del grafico di figura 1, quello che gli opzionisti denominano AtNow (attenzione, non è il PayOff!).

Bene, allora che cosa rappresenta il delta di questa opzione nei punti 14.500, 14.750 e 15.000? Non dobbiamo far altro che tracciare le rette tangenti, alla curva AtNow, in quei tre punti. Il risultato è mostrato in figura 2.



Osserviamo le rette tangenti: nel punto 14.500, di colore nero; nel punto 14.750, di colore rosso; nel punto 15.000 di colore verde. Via via che il sottostante aumenta, si nota un aumento della pendenza della curva (aumenta l'angolo che la retta tangente forma con l'asse orizzontale). Ma se aumenta la pendenza, vuol dire che sta aumentando il delta.

La moneyness di un'opzione ci dice quanto quell'opzione è distante dal prezzo del sottostante. Una call 14.800 è ATM (At The money) quando il sottostante batte 14.800, prima è OTM (Out The Money). Quindi, nel nostro caso, ad esempio, a 14.750 è OTM, ed è ancor più OTM a 14.500. Dopo, invece, è ITM (In The Money). Perciò, se il sottostante battesse 15.000, la nostra opzione sarebbe divenuta ITM. Ora notate l'andamento del delta, al variare del sottostante: più l'opzione è OTM e più è bassa l'inclinazione della retta tangente (fino a diventare praticamente zero); più è ITM e più è alta la pendenza della curva (fino a diventare praticamente 1, o 100%). Il delta della nostra opzione, quindi, varia da 0 a 1. E quando è ATM? In quel caso il delta si colloca proprio a metà dell'escursione possibile: 0,5 o 50%.

A conferma di ciò, voglio proporvi un altro grafico, tratto dal mondo reale. La figura 3 è un'istantanea (qualche decina di anni fa si diceva così, a proposito di una fotografia!) che fotografa il delta delle opzioni call della chain scadenza mensile prossima – giugno 2022 – alle ore 11:50 circa, quando il sottostante batte 14.527. Gli strike presi in considerazione non sono tutti quelli quotati sul mercato: vanno da 13.500 a 15.500, circa 1000 punti in più e 1000 in meno rispetto al valore registrato in quel momento del sottostante.

Cerchiamo di comprendere bene quel che mostra la figura 3. Sull'asse delle ascisse (quello orizzontale) c'è lo strike di ciascuna delle opzioni appartenenti alla chain menzionata. Mentre, su quello verticale (l'asse delle ordinate), è stato riportato il valore del delta di ognuna di quelle opzioni. Facciamo qualche esempio. La 15.100, che rispetto al valore del sottostante è molto OTM, ha un delta del 9,12% (oppure 0,09 circa). La 14.600 che è quasi ATM, ma ancora OTM, ha un valore del delta pari al 44,88%. Come noterete, è prossimo al 50%, ma ancora inferiore. La 14.100, che è abbastanza ITM, possiede un delta del 77,01%.

Noterete che sul grafico ho riportato un segmento verticale, in corrispondenza del valore del sottostante battuto al momento, che intercetta la curva in prossimità del 50% (tra 52,81% e 48,95%), come era lecito attendersi.

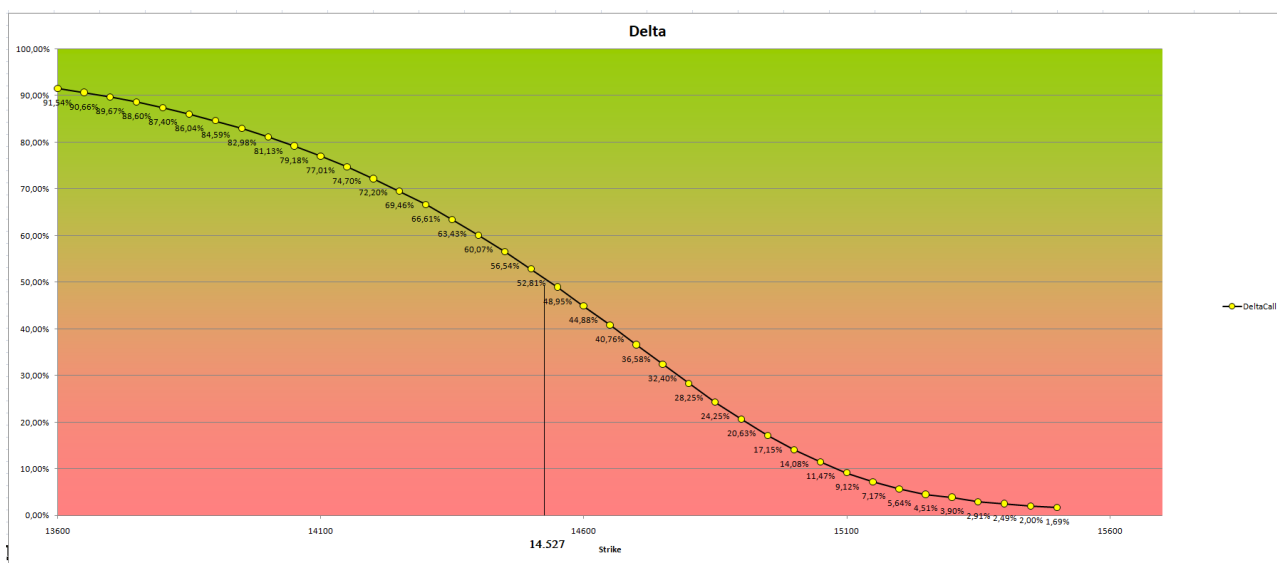


Figura 3

### Delta di una put

E come vanno le cose per le put? Dopo quanto scritto dovrete essere in grado di farlo in modo autonomo. Ma proviamo a fare assieme qualche veloce considerazione. Innanzitutto partiamo dall'AtNow di un'opzione put, illustrato in figura 4, che abbiamo acquistato a 196 punti. E' un'opzione con scadenza giugno 2022 e l'istantanea si riferisce alle ore 12:50 circa del 3/06/2022.

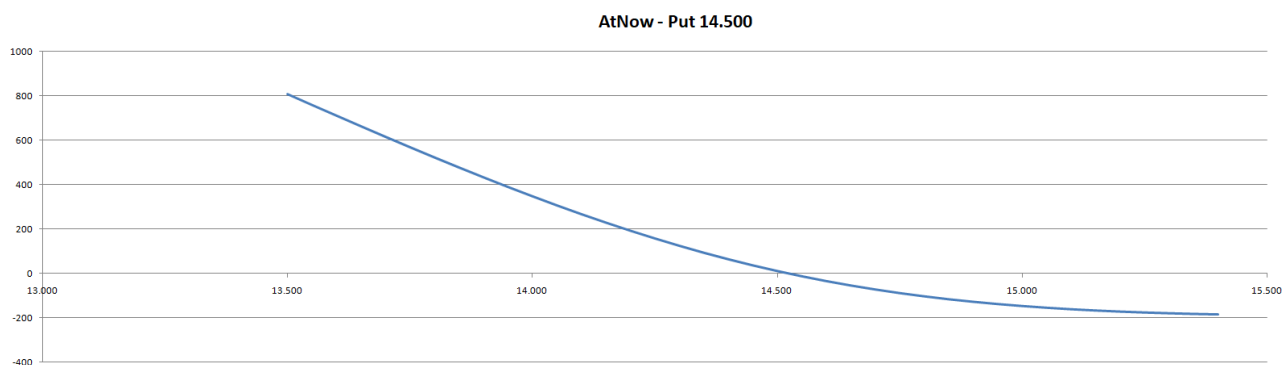


Figura 4

Com'era lecito attendersi, il valore di questa opzione cresce al decrescere del sottostante. E questo lo dovremmo già sapere. Ma come va il delta? Proviamo a farne una valutazione grafica. Ci posizioniamo a 14.500 e consideriamo un intorno di 200 punti del valore del sottostante (100 punti sopra e 100 punti sotto). In corrispondenza di tali estremi andiamo a valutare il valore della nostra put.

Per un aumento del sottostante di 100 punti, la nostra opzione perderà di valore portandosi a 161 punti. Per una diminuzione del sottostante di 100 punti, invece, avremo una rivalutazione della put che si porterà a 259 punti. Eseguiamo allora il calcolo.

### AtNow - Put 14.500

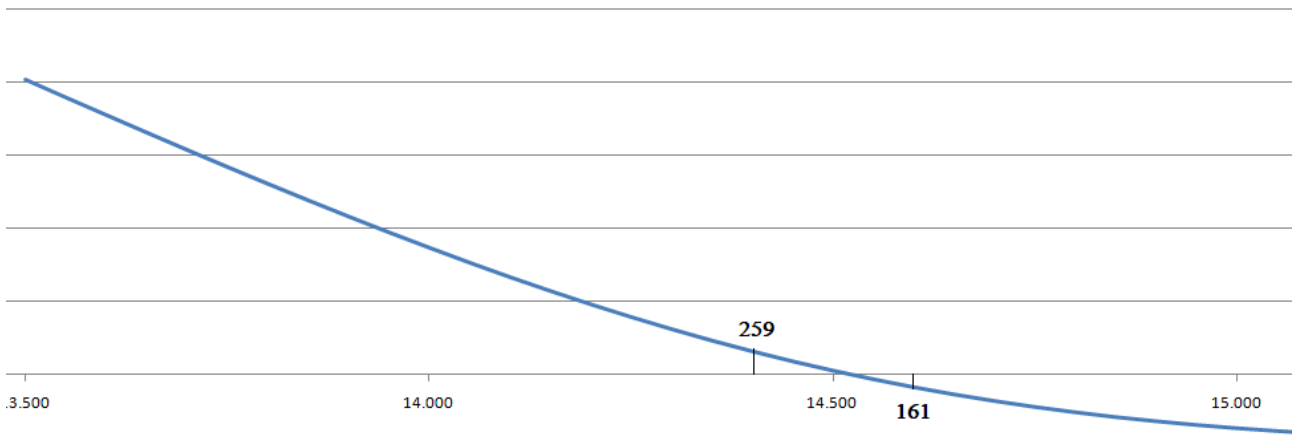


Figura 5

$$\Delta \cong \frac{(p_f - p_i)}{(S_f - S_i)} = \frac{(259 - 161)}{(14.400 - 14.600)} = \frac{98}{-200} = -0,49 = -49\%$$

Si noti la presenza del segno meno: il delta di un'opzione put (comprata) è negativo! Ma cerchiamo di capire bene come si arriva a quel segno meno e quali implicazioni ha. Allora, il punto dal quale dobbiamo partire è la definizione di delta: rapporto tra variazione del prezzo di un'opzione e variazione del sottostante. Ora, la variazione di una grandezza (fisica, economica, ...) si trova facendo la differenza tra il valore finale e quello iniziale. Nel nostro esempio noi stiamo supponendo che il sottostante si muova da 14.600 a 14.400: quindi valore finale (14.400) meno valore iniziale (14.600) fa -200 (meno duecento punti). Questo al denominatore di quella frazione. E al numeratore? Dobbiamo mettere la variazione corrispondente del prezzo. Attenzione a quel "corrispondente". Significa che dobbiamo fare la differenza tra il prezzo dell'opzione quando il sottostante assume il valore finale, meno il prezzo dell'opzione, quando il sottostante assume il valore iniziale. Notate la corrispondenza dei pedici (i ed f). Qualcuno potrebbe obiettare: e se il movimento del mercato fosse avvenuto al contrario? Cambiava tutto! No, non è così. Vediamo. Diciamo che il nostro sottostante si trova a 14.400, valore iniziale, e che si porta a 14.600, valore finale. Quando il nostro sottostante si trova al valore iniziale,  $S_i$ , la nostra put avrà valore  $p_i$ ; e quando il nostro sottostante si porterà al valore finale,  $S_f$ , la nostra put avrà valore  $p_f$ . Ovvero:

$$\begin{cases} S_f = 14.600 \\ p_f = 161 \end{cases} \quad \begin{cases} S_i = 14.400 \\ p_i = 259 \end{cases}$$

Ed ora calcoliamo il delta:

$$\Delta \cong \frac{(p_f - p_i)}{(S_f - S_i)} = \frac{(161 - 259)}{(14.600 - 14.400)} = \frac{-98}{200} = -0,49 = -49\%$$

In sostanza, per un incremento positivo del sottostante, si osserva un incremento negativo del prezzo della put. La frazione risultante avrà ancora segno algebrico negativo. Spero, di aver dissipato qualcuno (almeno) dei vostri dubbi!

Dicevo delle implicazioni. Riprendiamo la nostra formula e cerchiamo di "lavorarci" un po' su. Non vi spaventate: è tutta matematica di scuola superiore (primo biennio).

$$\Delta \cong \frac{(p_f - p_i)}{(S_f - S_i)}$$

Se moltiplichiamo per la differenza  $(S_f - S_i)$  sia il primo che il secondo membro otteniamo:

$$(S_f - S_i) \cdot \Delta \cong \frac{(p_f - p_i)}{(S_f - S_i)} \cdot (S_f - S_i)$$

Possiamo quindi semplificare (a croce, come si dice) al secondo membro per ottenere:

$$(S_f - S_i) \cdot \Delta \cong (p_f - p_i)$$

Possiamo ora sommare  $p_i$  sia al primo che al secondo membro:

$$(S_f - S_i) \cdot \Delta + p_i \cong (p_f - p_i) + p_i$$

E semplificando  $p_i$  al secondo membro otteniamo finalmente:

$$p_f \cong (S_f - S_i) \cdot \Delta + p_i$$

Che cosa ci dice questa equazione? Come calcolare (prevedere) il prezzo di un'opzione quando si conosce il delta, il valore iniziale di quell'opzione e i valori iniziale e finale del sottostante. Facciamo subito un esempio numerico. Prendiamo sempre la nostra opzione put 14.500 e supponiamo di voler sapere che valore avrà se il sottostante scende di 75 punti a partire da 14.500. Immaginiamo che il suo valore sia 196. Ebbene:

$$p_f \cong (S_f - S_i) \cdot \Delta + p_i = (14.425 - 14.500) \cdot (-0,49) + 196 = 232,75$$

Spero sia chiaro.

Questa formula, naturalmente, vale anche per calcolare il prezzo di una call. Ovviamente inserendo il valore del delta che, in quel caso, sarà positivo.

E infine, anche in questo caso dal mondo reale, facciamo vedere, per la medesima chain, l'andamento del delta di ciascuna opzione put con strike variabile da 13.500 a 15.500 col sottostante attorno a 14.450. Facciamo riferimento alla figura 6.

Sembra identica alla precedente (quella di figura 3) ma, attenzione: l'asse delle ordinate è negativo. Ad esempio, se prendiamo una put ITM, come la 15.100, troviamo un delta di -92,38%. Mentre una put OTM, come la 14.100, presenterà un delta pari a -24,94%. Quindi, sintetizzando, il delta di una put varia tra 0 e -1.

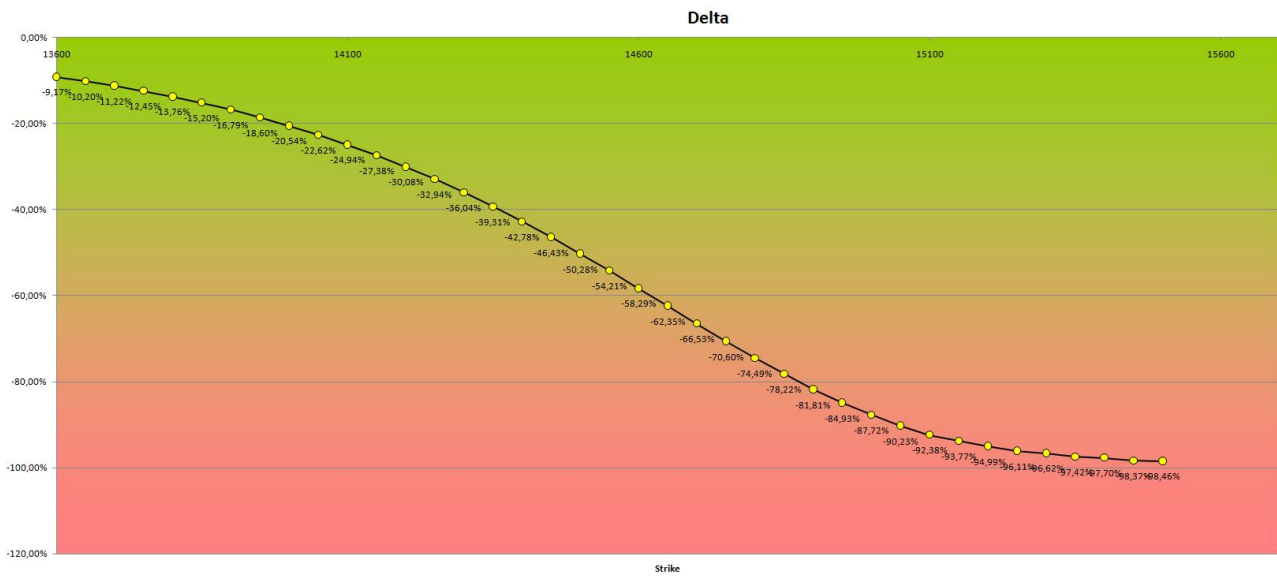


Figura 6

## Prime conclusioni

Abbiamo appena grattato la superficie, ma non vorrei mettere troppa carne al fuoco. Spero che ora si abbia un'idea un po' più robusta di cosa è questa greca. Nelle puntate successive affronteremo il delta di portafoglio, come calcolarlo e come visualizzarlo geometricamente; vedremo anche, come è stato già anticipato, che il delta non è costante: varia al variare del sottostante (ed è il gamma che ci rende conto di tali variazioni), varia al variare della volatilità implicita e varia al trascorrere del tempo.

E, naturalmente, discorreremo anche del gamma: una greca che diviene particolarmente importante con il decrescere della vita residua di un contratto di opzioni.

Buon studio e ...

... alla prossima!