Delta e gamma (parte seconda)

Premessa

Nell'ultimo articolo abbiamo cominciato a discutere del delta. Cominciato, si, perché c'è ancora molto da dire. In questo secondo articolo, però, prima di continuare con il delta, ho bisogno di introdurre il gamma, greca del secondo ordine, particolarmente legata al delta, come avremo modo di appurare.

Ritorno alla fisica

Accelerazione e velocità sono concetti che nascono con lo studio della fisica. Sono concetti, però, che sprigionano una tale potenza di significato che, nel tempo, hanno travalicato i confini di questa disciplina per approdare in ambiti disciplinari anche molto distanti dalla fisica.

E così, ad esempio, in informatica, ci si riferisce alla velocità di calcolo (o comPutazionale) intendendo con ciò il numero di operazioni al secondo che un sistema a microprocessore è in grado di eseguire; oppure, in chimica, la velocità di reazione chimica (o, semplicemente, velocità di reazione) definisce la quantità di sostanza reagente che viene consumata (o, anche, prodotta) nell'unità di tempo; e in medicina, ancora, indichiamo con velocità di sedimentazione degli eritrociti la velocità con cui i globuli rossi si separano dal plasma depositandosi sul fondo (anche indicata con l'acronimo VES).

Sono solo alcuni esempi. Se ne potrebbe fare un elenco (quasi) infinito! Attingendo non solo dalla chimica, dalla medicina e dall'informatica, ma anche dalla sociologia, dalla pedagogia, dalla psicologia e da tante altre discipline. Se avete notato, comunque, in tutti questi esempi la variabile indipendente è il tempo. In sostanza, in questo processo di generalizzazione semantica che ha conosciuto, nell'arco dei secoli, il termine ***velocità***, il primo passaggio è stato quello di agire sul numeratore della frazione, lasciando inalterato il denominatore, cioè il tempo. E così, la velocità ha via via assunto il significato di variazione di una certa grandezza (fisica o non fisica) al variare del tempo.

Ma poi, ci si è resi conto che anche il denominatore era suscettibile di generalizzazione. E senza andare tanto lontano e rimanendo nell'ambito che tutti i giorni noi frequentiamo, quello delle opzioni finanziarie, che cosa è il delta? E' anch'esso una velocità. E' la velocità con cui varia il prezzo di un'opzione al variare del sottostante. Osservate che non stiamo parlando più di tempo. Qui, il tempo, è sostituito dal sottostante.

Da un punto di vista squisitamente matematico, vale la pena ribadirlo, la velocità è una derivata prima.

E l'accelerazione? Partiamo, ancora una volta, dalla fisica. Che cosa è l'accelerazione? E' la variazione della velocità rispetto al tempo. E', quindi, la derivata prima della velocità. Ma, siccome, la velocità è la derivata prima, sempre rispetto al tempo, della posizione, possiamo conseguentemente affermare che l'accelerazione è la derivata seconda della posizione rispetto al tempo.

In simboli, indicando con ***s*** lo spazio percorso, con ***v*** la velocità, con ***a*** l'accelerazione e con ***t*** il tempo, possiamo scrivere, per la velocità:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

e per l'accelerazione:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

dove quest'ultima è stata indicata come derivata prima della velocità, ma anche come derivata seconda dello spazio percorso[1].

Ma perché si è sentita la necessità di introdurre una grandezza fisica come l'accelerazione? L'accelerazione ci racconta come varia la velocità. Se noi, con la nostra autovettura, procediamo sull'autostrada a velocità costante, la nostra accelerazione è nulla. E non dipende dal valore della velocità con cui stiamo procedendo. Che la nostra velocità sia di 50 km/h, o di 90 km/h, se costante, l'accelerazione sarà nulla. Questo è un risultato importante e generale, che utilizzeremo più avanti. Se ancora qualcuno ha dei dubbi, senza ricorrere ad una dimostrazione matematica formale, ecco un argomento convincente. Ricordando che l'accelerazione è la derivata della velocità, rispetto al tempo, questo vuol dire *rapporto tra la variazione della velocità e l'intervallo di tempo in cui tale variazione avviene*. Quindi, considerando due istanti in successione, diciamo t_1 e t_2, e misurando la velocità in tali istanti, diciamo v_1 e v_2, l'accelerazione media (in tale intervallo di tempo) la calcoliamo in questo modo:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = 0$$

E' uguale a zero perché? Perché, essendo la velocità costante, v_1 e v_2 sono uguali e quindi la loro differenza è nulla. In sostanza quella frazione è nulla perché il numeratore è nullo (non lo è il denominatore, essendo t_1 e t_2 due istanti differenti).

Ed ora facciamo un esempio di calcolo dell'accelerazione media che, sono certo, interesserà tutti quei lettori che sono appassionati del mondo dell'automobilismo. Un produttore di auto sportive, nella sua comunicazione pubblicitaria, afferma che il tal modello passa da 0 a 100 km/h in 6,2 s. Ecco provate a calcolare l'accelerazione media, per esercizio, senza leggere il calcolo eseguito più avanti.

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{100 - 0}{6{,}2 - 0}$$

Per esprimere l'accelerazione in m/s^2 occorre prima fare un'equivalenza.

$$1 \left[\frac{km}{h}\right] = \frac{1000}{3600}\left[\frac{m}{s}\right] \cong 0{,}278 \left[\frac{m}{s}\right]$$

(il risultato è approssimato alla terza cifra decimale).

Quindi:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{100 \cdot 0{,}278 - 0 \cdot 0{,}278}{6{,}2 - 0} = \frac{27{,}8}{6{,}2} = 4{,}48 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

(l'unità di misura dell'accelerazione si legge: *metri al secondo quadro*).

Interpretiamo questo risultato. Questa accelerazione ci dice che la velocità della nostra autovettura varia di 4,48 m/s ogni secondo. Pertanto, partendo da ferma, dopo un secondo la sua velocità sarà di 4,48 m/s (circa 16,2 km/h); dopo due secondi, la sua velocità passerà a 8,96 m/s (4,48 m/s per 2, circa 32,4 km/h); dopo tre secondi, avremo una velocità di 13,44 m/s (4,48 m/s per 3, circa 48,6 km/h) e così via.

Ed ora cimentiamoci con un altro esempio. Un aeroplano ha un'accelerazione di 5,8 m/s^2 in fase di decollo. Calcoliamo il tempo che impiega per raggiungere la sua velocità di decollo, 260 km/h.

E' sufficiente invertire la formula dell'accelerazione media. Vediamo come.

---

[1] La posizione di quella coppia di 2 non è un refuso: si scrive in quel modo la derivata seconda. E' la simbologia originale ideata da Leibniz.

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Da questa equazione dobbiamo ricavare la variazione di tempo. Moltiplichiamo, quindi, per tale grandezza, sia il primo che il secondo membro.

$$\Delta t \cdot a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \Delta t$$

semplifichiamo ed otteniamo:

$$\Delta t \cdot a_m = \Delta v$$

ed ora dividiamo, entrambi i membri, per l'accelerazione media:

$$\frac{\Delta t \cdot a_m}{a_m} = \frac{\Delta v}{a_m}$$

semplifichiamo e ci siamo (ricordiamoci di convertire km/h in m/s):

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a_m} = \frac{260\ km/h}{5{,}8\ m/s^2} = \frac{260\ \cdot 0{,}278}{5{,}8} = 12{,}46\ s$$

Quindi, dopo poco più di 12 secondi, l'aereo si staccherà dal suolo.

Bene. Spero che questi esempi siano chiari. Prima di passare oltre devo dirvi che in fisica il concetto di accelerazione è importantissimo. Galileo, ad esempio, fece vedere, in un famoso esperimento, che i corpi in caduta libera si muovono con accelerazione costante. E' controintuitivo pensare che se lasciamo cadere da una stessa altezza, una pallina di metallo ed una piuma, questi due corpi toccheranno terra nello stesso istante. Dalla nostra esperienza sappiamo che non è così. Ma ciò accade in quanto l'aria esercita una grande forza di attrito, sulla piuma; attrito che si oppone al movimento di quest'ultima esercitando un'azione di freno. Se però, come fece Galileo, realizziamo questo esperimento in un ambiente privo di aria, i due corpi arriveranno a terra nello stesso istante in quanto soggetti solo all'accelerazione di gravità. Accelerazione che è (quasi) costante in tutti i punti della terra e non dipende dalla massa del corpo.

Il contributo di Newton alla dinamica, col suo noto principio, afferma che forza, massa ed accelerazione sono legate da un'equazione (equazione spesso indicata come il secondo principio della dinamica).

Ed anche nel nostro mondo, come molti di voi avranno compreso seguendo le indicazioni di Bruno, le greche più interessanti non sono, forse, proprio quelle del secondo ordine? In sostanza si tratta di accelerazioni. O, meglio, di accelerazioni generalizzate.

Moto con accelerazione costante

Se un corpo si muove con accelerazione costante, diciamo che compie un moto uniformemente accelerato. L'equazione che ora dedurremo, la utilizzeremo anche più avanti per descrivere la variazione del prezzo di un'opzione. Seguitemi. Ricordiamo la definizione di accelerazione media.

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

Dove i pedici i ed f indicano, rispettivamente, iniziale e finale. Gli istanti iniziali e finali, e le corrispondenti velocità, possono essere scelti arbitrariamente. Indichiamo con 0 (zero) l'istante iniziale ed eliminiamo il pedice per l'istante finale. Scriveremo, allora:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

ed ora facciamo le solite operazioni di “manipolazione” per cercare di isolare la v. Moltiplichiamo ambo i membri per la differenza $t - t_0$ ottenendo:

$$(t - t_0)a_m = \frac{v - v_0}{t - t_0}(t - t_0)$$

semplifichiamo a croce:

$$(t - t_0)a_m = v - v_0$$

sommiamo, sia al primo che al secondo membro, la velocità iniziale:

$$v_0 + (t - t_0)a_m = v_0 + v - v_0$$

semplificando e scambiando i membri si giunge a:

$$v = v_0 + (t - t_0)a_m$$

Scegliamo, quale istante iniziale, 0 (ovvero, zero secondi). Riscriviamo l’equazione:

$$v = v_0 + a_m t$$

E ci siamo. Che cosa ci dice questa relazione? Che un corpo, soggetto ad accelerazione costante, assume una velocità che è pari alla velocità iniziale più il prodotto dell’accelerazione per il tempo trascorso.

Facciamo subito un esempio. Supponiamo di voler lanciare verso l’alto una palla con una velocità iniziale di 7,5 m/s. Quale sarà la velocità della palla dopo mezzo secondo e dopo 2 s?

Sappiamo che l’accelerazione di gravità, indicata con g, vale 9,81 m/s^2 . E sappiamo anche che questa è diretta verso il basso. Quindi, rispetto alla direzione della palla, è negativa. Trascurando la resistenza dell’aria, possiamo allora scrivere (nel caso di mezzo secondo):

$$v = v_0 - gt = 7{,}5 - 9{,}81 \cdot (0{,}5) = 2{,}595 \left[\frac{m}{s}\right]$$

Si può notare che dopo mezzo secondo la palla continua a procedere verso l’alto ma con una velocità che è circa un terzo di quella iniziale: sta frenando la sua corsa a causa della forza di gravità che spinge verso il basso. E dopo 2 secondi, che cosa accade?

$$v = v_0 - gt = 7{,}5 - 9{,}81 \cdot (2) = -12{,}12 \left[\frac{m}{s}\right]$$

Questa volta troviamo una velocità negativa! Che cosa è accaduto? Che la palla è arrivata fino ad una certa altezza, dove si è fermata per un istante e poi ha invertito la sua corsa. E dopo due secondi dal lancio, sta picchiando verso il basso con una velocità di 12,12 m/s.

Ed ora poniamoci un’altra domanda. Come legare posizione, velocità ed accelerazione? L’equazione alla quale mi sto riferendo è la *legge oraria del moto uniformemente accelerato*. La dimostrazione matematica, in questo caso, è più complessa e, per i più curiosi (e matematicamente attrezzati) la riporto nel riquadro successivo con un corpo carattere più piccolo. Gli altri, possono saltare tali passaggi e andare direttamente al risultato finale. Che è poi quello che maggiormente ci interessa.

Abbiamo visto che:

$$v = v_0 + a_m t$$

D'altronde sappiamo che la velocità è legata allo spostamento dalla relazione:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

e, quindi, sostituendo, possiamo scrivere:

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + a_m t$$

che è un'equazione differenziale. Separando le variabili, la possiamo riscrivere nel modo seguente:

$$ds = (v_0 + a_m t)dt$$

Integriamo ambo i membri (considerando, come abbiamo fatto prima, l'istante iniziale nullo):

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t (v_0 + a_m t)dt = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t a_m t dt$$

$$s - s_0 = v_0 t + a_m \int_0^t t dt$$

$$s = s_0 + v_0 t + a_m \frac{t^2}{2}$$

che è la legge oraria cercata.

Che cosa ci dice questa equazione? Che se abbiamo una particella che all'istante iniziale si trova in posizione s_0, possiede una velocità iniziale v_0, ed è soggetta all'accelerazione a_m, dopo un certo tempo t si troverà nella posizione s.

Vediamo subito un esercizio.

Immaginiamo che un automobilista sfrecci di fronte ad una coppia di moto della polizia (chi si ricorda dei CHiPs?) ad una velocità di 70 km/h quando il limite, in tale zona, è di 50 km/h. Supponiamo, inoltre, che la polizia inizi il suo inseguimento nell'istante in cui l'automobilista passa davanti alla polizia. E, infine, supponiamo ancora che l'automobilista mantenga una velocità costante mentre le moto della polizia accelerino con accelerazione costante pari a 4,5 m/s^2 . Si vuole sapere:

a. Il tempo impiegato dalla polizia per raggiungere l'automobilista;
b. Quanto spazio, in quel momento, sarà stato percorso da tali mezzi;
c. La velocità delle moto della polizia, sempre in tale istante.

Cercheremo di sfruttare la legge oraria che è stata appena ricavata (nel riquadro con fondino celeste). Stabiliamo, come sistema di riferimento, una retta orientata verso destra (i due veicoli si muovono in una dimensione) con l'origine posta nel punto in cui stazionano le moto della polizia. Come mostrato in figura 1.

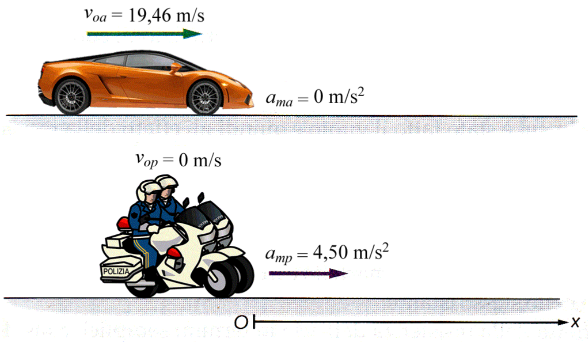

Figura 1

Ora, concentriamoci sull'equazione che dobbiamo scrivere per lo spazio percorso dall'automobilista. Indichiamolo con s_a. Scriveremo:

$$s_a = s_{0a} + v_{0a}t + a_{ma}\frac{t^2}{2} = v_{0a}t$$

perché? Perché lo spazio percorso, nell'istante in cui cominciamo a contare a misurare tale spazio, è zero. Quindi $s_{0a} = 0$ è poi perché, per ipotesi, l'automobilista non sta accelerando, quindi: $a_{ma} = 0$.

Rimane, quindi, solo la velocità dell'automobilista che è uguale a quella iniziale. Quindi: $s_a = v_{0a}t$.

Ed ora concentriamoci sulle moto della polizia. Per lo spazio da esse percorso scriveremo:

$$s_p = s_{0p} + v_{0p}t + a_{mp}\frac{t^2}{2} = a_{mp}\frac{t^2}{2}$$

Ora, spero, dovrebbe essere chiaro il motivo: anche le moto della polizia, all'istante iniziale, non hanno percorso già uno spazio ($s_{0p} = 0$); e la velocità iniziale è nulla ($v_{0p}t = 0$). Ed ora, che si fa? Si deve imporre l'eguaglianza di queste due equazioni. Cioè, noi siamo interessati a sapere quando quei due spazi saranno uguali. Quindi:

$$s_a = s_p$$

Ovvero:

$$v_{0a}t = a_{mp}\frac{t^2}{2}$$

che possiamo anche scrivere in questo modo:

$$v_{0a}t - a_{mp}\frac{t^2}{2} = 0$$

e, mettendo t in evidenza:

$$t\left(v_{0a} - a_{mp}\frac{t}{2}\right) = 0$$

che ci da due soluzioni:

$$t = 0 \qquad \text{e} \qquad t = \frac{2v_{0a}}{a_{mp}}$$

La prima delle due soluzioni non ci interessa, in quanto ci dice che i due mezzi, all'istante t=0, hanno percorso lo stesso spazio: questo è evidente in quanto i veicoli, in quell'istante, si trovano nella stessa posizione, s=0.

Più interessante, invece, è l'altra soluzione alla quale, ora,daremo anche dignità numerica.

Prima di tutto, trasformiamo la velocità dell'automobilista in m/s.

$$v_{0a} = 70 \cdot 0{,}278 = 19{,}46 \left[\frac{m}{s}\right]$$

poi, eseguiamo il calcolo:

$$t = \frac{2v_{0a}}{a_{mp}} = \frac{2 \cdot 19{,}46}{4{,}5} = 8{,}65\ s$$

Quindi, dopo poco più di 8 s, l'automobilista viene raggiunto. Ed ora rispondiamo alle altre domande. Quanto spazio è stato percorso in questo tempo da tali mezzi? Riprendiamo le leggi orarie.

$$s_a = v_{0a}t = 19{,}46 \cdot 8{,}65 = 168{,}33\ m$$

Ovviamente, lo stesso risultato, lo dobbiamo trovare utilizzando la legge oraria delle due moto della polizia. Facciamolo per verifica:

$$s_p = a_{mp}\frac{t^2}{2} = 4{,}5 \cdot \frac{8{,}65^2}{2} = 168{,}35\ m$$

(vi è una minima differenza dovuta alle approssimazioni).

Ed ora, calcoliamo la velocità posseduta dai mezzi della polizia nell'istante in cui viene raggiunto l'automobilista. L'equazione, in questo caso, è:

$$v_p = v_{0p} + a_{mp}t = 0 + 4{,}5 \cdot 8{,}65 = 38{,}93\ \left[\frac{m}{s}\right]$$

In figura 2 ho riportato il grafico dello spazio percorso. Notate che la curva blu, che indica lo spazio percorso dai mezzi della polizia, ha un andamento parabolico (già, si tratta proprio di una parabola!). L'istante di tempo corrispondente all'intersezione delle due curva è proprio l'istante in cui i due spazi percorsi sono uguali (i ChiPs hanno raggiunto l'automobilista). La curva arancio rappresenta lo spazio percorso dall'automobilista che, procedendo con velocità costante, è rappresentata da una retta.

Con un opportuna trasformazione di variabili, queste due curve potrebbero rappresentare il guadagno di uno strumento lineare (azione o future), al crescere del sottostante: curva arancio. Ed il guadagno di uno strumento non lineare, per esempio una Call, sempre al crescere del sottostante, la curva blu. In realtà, il prezzo di una Call non cresce con andamento parabolico. Ma ho voluto comunque richiamare l'attenzione del lettore su tale grafico, e la relativa analogia, in quanto, spesso, in finanza, si costruiscono operazioni di copertura che poi danno luogo ad un grafico simile a quello di figura 2.

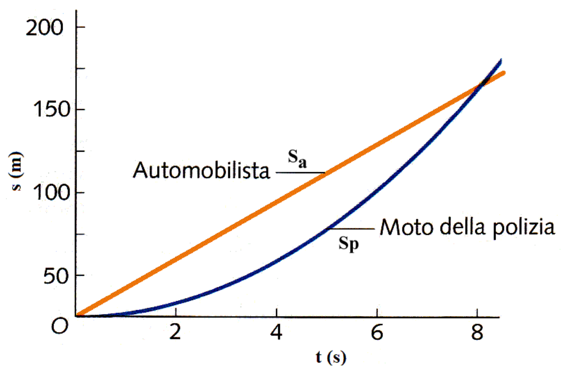

Figura 2

Definizione di gamma

Ed ora, finalmente, passiamo allo studio di questa greca. Partiamo dalla definizione.

Il gamma è la derivata parziale prima del delta, rispetto al sottostante.

E, siccome il delta è la derivata parziale prima del prezzo dell'opzione, rispetto al sottostante, allora il gamma è (anche) la derivata parziale seconda del prezzo al variare del sottostante. In simboli, nel caso di una Call:

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$$

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}$$

Per una Put, in termini di definizione, non cambia nulla (sostituite ***c*** con ***p***). Continuo ad usare la simbologia che viene utilizzata in ambito accademico internazionale: rappresentiamo questa grandezza, il gamma, proprio con la lettera gamma (in forma maiuscola) dell'alfabeto greco.

Invito il lettore ad osservare che, da un punto di vista formale, il gamma è analogo all'accelerazione. E' sufficiente sostituire il prezzo dell'opzione (***c*** o ***p***) con lo spazio, il sottostante (S) con il tempo e il delta (Δ) con la velocità. Ci torneremo più avanti.

Ed ora, con l'aiuto del nostro fidato Excel (userò quello messo già a disposizione con tutte le formule della B&S), cominciamo a prendere confidenza con questa greca. Consideriamo sempre il Dax, quale sottostante, ed andiamo ad osservare la chain delle opzioni che scadono ad agosto 2022. Tale chain, rilevata alle ore 11:00 circa del 21/07/2022, è riportata nella figura 3. Nell'ora di rilevazione l'indice vale 13.160 circa.

Come noterete, oltre al gamma, ho aggiunto anche la colonna del delta. Ci servirà.

Allora, facciamo alcune osservazioni. Intanto, si tratta di un valore molto piccolo (notate la presenza di tre zeri dopo la virgola). Qualcuno, quando espone il valore di questa greca, per non vedere tutti quegli zeri moltiplica il valore del gamma per 1000. Per me va bene, nessun problema. L'importante è ricordarsene, poi, in sede operativa! Io ho volutamente lasciato il gamma così com'è, diciamo al naturale, per motivi didattici. Qui dobbiamo capire bene come stanno le cose.

Poi, seconda osservazione, la colonna del gamma delle opzioni Call, come noterete, è uguale alla colonna del gamma delle opzioni Put. Quindi il gamma di una Call coincide con il gamma della Put relativa allo stesso strike. Perché? Cercherò, più avanti, di dimostrarvelo (non in modo matematicamente rigoroso, ma convincente).

Infine, notate che all'aumentare dello strike (quindi, fate una lettura del gamma leggendo la colonna a partire dall'alto e scorrendola verso il basso) il gamma aumenta, raggiunge un massimo e poi torna a diminuire. Perché? Anche su questo cercherò di darvi una spiegazione convincente (e, direi, anche soddisfacente, questa volta, sotto il profilo del rigore matematico).

	call					put					spot
strike	bid	ask	mid	delta	gamma	bid	ask	mid	delta	gamma	valore
11500	1.713,0	1.732,0	1.722,5	91,34%	0,000116	54,5	58,0	56,3	-8,66%	0,000116	13.163,98
11600	1.619,0	1.636,0	1.627,5	90,38%	0,000128	61,5	64,0	62,8	-9,62%	0,000128	13.162,72
11700	1.531,0	1.543,0	1.537,0	89,21%	0,000142	69,0	71,5	70,3	-10,79%	0,000142	13.162,20
11800	1.439,0	1.450,0	1.444,5	87,98%	0,000156	77,0	81,0	79,0	-12,02%	0,000156	13.163,43
11900	1.349,0	1.360,0	1.354,5	86,60%	0,000172	87,0	90,0	88,5	-13,40%	0,000172	13.163,91
12000	1.260,0	1.270,0	1.265,0	85,07%	0,000189	97,5	100,5	99,0	-14,93%	0,000189	13.162,40
12100	1.172,0	1.182,0	1.177,0	83,34%	0,000207	110,0	112,5	111,3	-16,66%	0,000207	13.162,63
12200	1.086,0	1.096,0	1.091,0	81,45%	0,000227	122,5	126,5	124,5	-18,55%	0,000227	13.162,11
12300	1.001,0	1.012,0	1.006,5	79,34%	0,000247	138,5	142,0	140,3	-20,66%	0,000247	13.163,84
12400	919,0	929,0	924,0	77,04%	0,000268	156,0	159,5	157,8	-22,96%	0,000268	13.164,08
12500	839,0	849,0	844,0	74,51%	0,000289	175,5	179,0	177,3	-25,49%	0,000289	13.164,56
12600	761,0	770,0	765,5	71,72%	0,000312	197,0	201,5	199,3	-28,28%	0,000312	13.164,04
12700	686,0	695,0	690,5	68,68%	0,000333	221,5	226,0	223,8	-31,32%	0,000333	13.164,02
12800	613,0	622,0	617,5	65,36%	0,000354	249,5	254,0	251,8	-34,64%	0,000354	13.162,76
12900	545,0	553,0	549,0	61,91%	0,000374	280,0	285,0	282,5	-38,09%	0,000374	13.164,24
13000	479,0	486,0	482,5	58,13%	0,000393	314,0	319,0	316,5	-41,87%	0,000393	13.163,22
13100	417,0	424,0	420,5	54,18%	0,000409	351,0	357,0	354,0	-45,82%	0,000409	13.163,70
13200	360,0	365,0	362,5	50,01%	0,000421	393,0	399,0	396,0	-49,99%	0,000421	13.163,69
13300	306,0	311,0	308,5	45,56%	0,000428	439,0	448,0	443,5	-54,44%	0,000428	13.161,17
13400	257,0	262,0	259,5	41,17%	0,000429	491,0	497,0	494,0	-58,83%	0,000429	13.162,15
13500	213,5	218,5	216,0	36,75%	0,000425	546,0	553,0	549,5	-63,25%	0,000425	13.163,63
13600	174,0	178,5	176,3	32,25%	0,000414	606,0	615,0	610,5	-67,75%	0,000414	13.162,62
13700	140,5	145,0	142,8	27,96%	0,000395	673,0	681,0	677,0	-72,04%	0,000395	13.161,85
13800	111,5	115,5	113,5	23,84%	0,000371	743,0	753,0	748,0	-76,16%	0,000371	13.162,83
13900	88,0	91,5	89,8	20,10%	0,000341	818,0	829,0	823,5	-79,90%	0,000341	13.162,81
14000	68,0	71,5	69,8	16,64%	0,000308	898,0	909,0	903,5	-83,36%	0,000308	13.162,30
14100	52,5	55,5	54,0	13,65%	0,000273	982,0	994,0	988,0	-86,35%	0,000273	13.161,53
14200	40,0	43,0	41,5	11,07%	0,000238	1.070,0	1.082,0	1.076,0	-88,93%	0,000238	13.163,01
14300	30,0	33,5	31,8	8,89%	0,000203	1.156,0	1.181,0	1.168,5	-91,11%	0,000203	13.160,74
14400	22,1	26,0	24,1	7,06%	0,000172	1.249,0	1.274,0	1.261,5	-92,94%	0,000172	13.160,03
14500	16,6	20,4	18,5	5,64%	0,000144	1.342,0	1.365,0	1.353,5	-94,36%	0,000144	13.162,46
14600	14,2	16,7	15,5	4,75%	0,000124	1.439,0	1.463,0	1.451,0	-95,25%	0,000124	13.161,89
14700	9,2	13,6	11,4	3,67%	0,000101	1.534,0	1.559,0	1.546,5	-96,33%	0,000101	13.162,32
14800	6,6	11,1	8,9	2,92%	0,000083	1.634,0	1.656,0	1.645,0	-97,08%	0,000083	13.161,26
14900	4,7	9,2	7,0	2,34%	0,000068	1.734,0	1.754,0	1.744,0	-97,66%	0,000068	13.160,34
15000	3,3	7,8	5,6	1,90%	0,000057	1.833,0	1.852,0	1.842,5	-98,10%	0,000057	13.160,42
15100	2,1	6,6	4,4	1,55%	0,000047	1.931,0	1.950,0	1.940,5	-98,45%	0,000047	13.161,30
15200	1,3	5,8	3,6	1,25%	0,000039	2.032,0	2.049,0	2.040,5	-98,75%	0,000039	13.160,39
15300	3,0	5,1	4,1	1,34%	0,000039	2.131,0	2.148,0	2.139,5	-98,66%	0,000039	13.161,87
15400	0,0	4,5	2,3	0,81%	0,000026	2.230,0	2.247,0	2.238,5	-99,19%	0,000026	13.161,05
15500	0,0	4,1	2,1	0,73%	0,000023	2.330,0	2.346,0	2.338,0	-99,27%	0,000023	13.161,33

Figura 3

La visualizzazione grafica di questa ultima affermazione la trovate nella figura successiva (figura 4). Direi che la forma del grafico è ineccepibile e ci rende, quasi plasticamente, il senso di tale affermazione e, se vogliamo, il senso proprio di questa greca che assume il suo valore massimo in prossimità dell'ATM ed i valori minimi quando l'opzione diviene DITM (deep ITM) e DOTM (deep OTM).

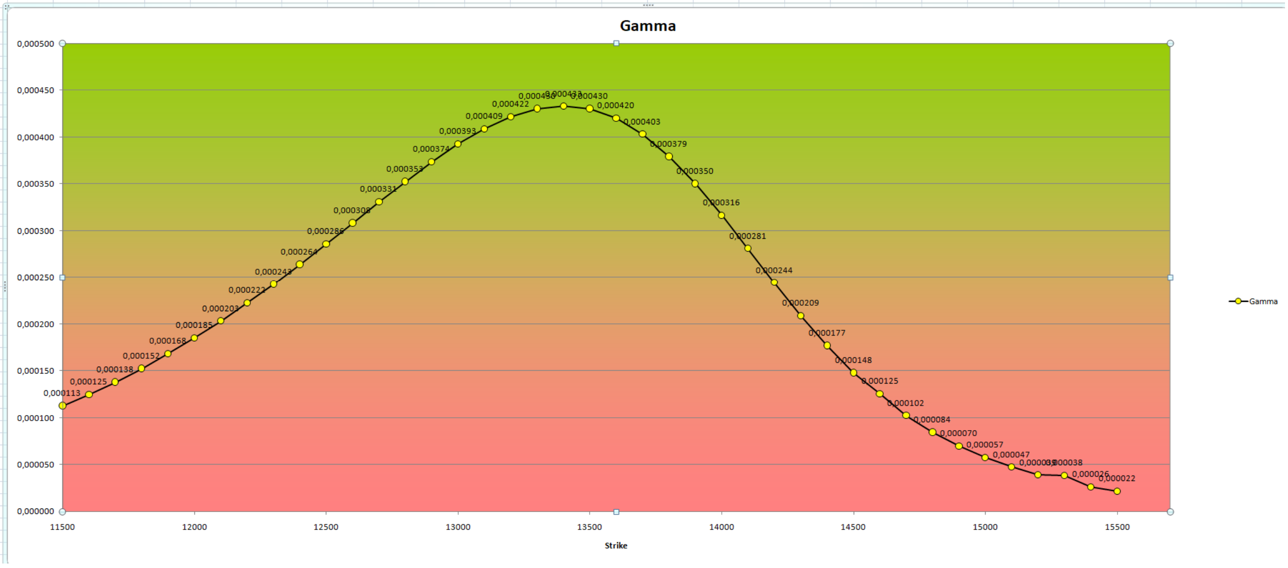

Figura 4

Un chiarimento sulla percentuale

Spesso abbiamo a che fare con dati espressi in percentuale. Per esempio, a Bolzano piove (in media), in un anno, il 27% dei giorni. Oppure, l'IVA è al 22%. Ma anche, il 65% delle persone di quella regione è castana. Che cosa rappresentano queste scritture e come vanno lette; ma, soprattutto, come vanno interpretate?

Dire che a Bolzano piove il 27% dei giorni di un anno vuol dire che, presi 100 giorni, 27 di questi saranno giorni di pioggia. Naturalmente, gli studiosi che si occupano di climatologia ottengono questa percentuale facendo il rapporto tra numeri di giorni di pioggia, in un anno, ed il totale dei giorni che vi sono in un anno (e poi fanno la media estendendo il calcolo alla serie storica che possiedono). Ad esempio:

$$\%giornipioggia = \frac{n°\ giorni\ di\ pioggia\ in\ un\ anno}{n°\ totale\ di\ giorni\ in\ un\ anno} = \frac{99}{365} = 27{,}12\%$$

Quindi, la percentuale altro non è che un rapporto. Vediamo alcuni esempi:

$$22\% = \frac{22}{100} \qquad 65\% = \frac{65}{100} \qquad 12{,}7\% = \frac{12{,}7}{100}$$

Quindi, cos'è una percentuale?

E' una frazione avente come denominatore 100 e, su una dato totale, indica quante unità su 100 soddisfano una certa condizione.

Ora, vediamo come utilizzarla. Se io affermo che in un certo gruppo di persone il 15% di queste bevono limonata e se voglio sapere quante sono, queste persone, se il gruppo è di 1200 unità, come eseguo il calcolo?

$$n°persone\ che\ bevono\ limonata = 15\% \cdot 1200 = \frac{15}{100} \cdot 1200 = 180$$

Che cosa ho fatto? Innanzitutto ho fatto una moltiplicazione tra la percentuale ed il numero totale delle persone presenti nel gruppo. Poi ho espresso la percentuale come rapporto. Quindi ho moltiplicato il numeratore di questo rapporto per 1200 (in questo caso) e diviso il risultato per 100. Domanda: si poteva eseguire il calcolo più velocemente? Si: trasformando la percentuale in decimale ed eseguendo il prodotto di questa per 1200. Vediamolo:

$$n°persone\ che\ bevono\ limonata = 0{,}15 \cdot 1200 = 180$$

Quel numero, 0,15, è la nostra percentuale trasformata in decimale. Qualcuno potrebbe obiettare che, anche in questo caso, occorre fare due operazioni: trasformare la percentuale in decimale e poi fare il prodotto di quest'ultima per il numero totale. E' vero. Ma per fare questa trasformazione, è sufficiente spostare la virgola di due posizioni verso sinistra.

$$15\% \rightarrow 0{,}15 \qquad 22\% \rightarrow 0{,}22 \qquad 12{,}6\% \rightarrow 0{,}126$$

Quindi, niente calcolatrice, per l'operazione di trasformazione!

Legame tra delta e gamma

Il chiarimento sulla percentuale si è reso necessario per capire come "trattare", dal punto di vista del calcolo, il delta, spesso espresso in decimale. Dopo quanto scritto, la scrittura successiva dovrebbe essere chiara per tutti (spero).

$$\Delta = 53\% = 0{,}53$$

Bene, proviamo a fare un calcolo approssimato (molto approssimato) del delta a partire dai dati espressi in figura 3.

Abbiamo detto che il legame corretto tra queste due greche è:

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$$

Quindi, per fare un calcolo approssimato del gamma di una certa opzione, come procediamo? Dovremo fare il rapporto tra una variazione del delta e la relativa variazione del sottostante.

Facciamo un esempio. Calcoliamo (meglio sarebbe dire, stimiamo) il gamma dell'opzione che ha strike 13.400. Consideriamo una variazione del sottostante, la più piccola possibile, e rileviamo la corrispondente variazione del delta. Poi faremo il rapporto tra le relative variazioni.

$$\Gamma = \frac{\Delta(13.260) - \Delta(13.160)}{13260 - 13160}$$

Ed ora attenzione alla lettura della tabella (per la quale, ricordo, il sottostante vale 13.160), che potrebbe indurre in errore. Seguitemi. La nostra Call 13.400, quando il sottostante cresce di 100 punti, avrà un delta che si sarà apprezzato. Dove lo leggo? Devo leggerlo in corrispondenza della Call 13.300, ovvero 45,56%. Ma perché in corrispondenza di 13.300 e non, per esempio, di 13.500? Perché col sottostante a 13.160 la nostra Call 13.400 si trovava 240 punti sopra. Ora, quando il sottostante sale di 100 punti a 13.260, la Call 13.400 si troverà a 140 punti sopra il valore del sottostante. E quale strike, nella tabella, si trovava, prima di tale crescita, a 140 punti sopra il valore del sottostante? E' la 13.300. Quindi, eseguiamo il calcolo:

$$\Gamma \cong \frac{\Delta(13.260) - \Delta(13.160)}{13260 - 13160} = \frac{45{,}56\% - 41{,}17\%}{100} = \frac{0{,}4556 - 0{,}4117}{100} = 0{,}000439$$

In tabella, invece, leggiamo 0,000429: un errore del 2,33% circa in eccesso! Ora, cercate di non travisare il senso di quanto qui riportato: io non voglio proporvi un metodo alternativo per il calcolo del gamma. Per quello abbiamo le nostre formule che ci restituiscono un valore estremamente preciso. Qui il senso è capire che cosa è il gamma. E lo ripeto: data una variazione del sottostante, il gamma è il rapporto tra la variazione che il delta assume in tale variazione e la variazione stessa del sottostante.

Ed ora, cerchiamo di giustificare l'andamento del gamma, ovvero del grafico di figura 4.

Partiremo, sempre, dal grafico del delta. Però, non della chain, ma della singola opzione. Questo per evitare quei ragionamenti, non sempre intuitivi, di spostamento dello strike che abbiamo dovuto fare prima a proposito della stima del gamma.

Prendiamo il nostro foglio Excel e facciamo variare sia il prezzo che il delta della Call 13.400/Ago22,al variare del sottostante tra 11.500 e 15.500. Otteniamo quanto mostrato in figura.

Andamento di prezzo, delta e gamma della Call 13.400/Ago22		
Sottostante	Prezzo	Delta
11500	2,9	1,12%
11600	4,2	1,57%
11700	6,1	2,16%
11800	8,6	2,92%
11900	12,0	3,88%
12000	16,4	5,08%
12100	22,2	6,53%
12200	29,6	8,27%
12300	38,9	10,33%
12400	50,3	12,71%
12500	64,4	15,42%
12600	81,3	18,47%
12700	101,4	21,83%
12800	125,1	25,50%
12900	152,5	29,43%
13000	184,0	33,58%
13100	219,7	37,92%
13200	259,9	42,37%
13300	304,5	46,89%
13400	353,6	51,42%
13500	407,3	55,90%
13600	465,4	60,27%
13700	527,8	64,48%
13800	594,3	68,50%
13900	664,7	72,28%
14000	738,8	75,80%
14100	816,2	79,04%
14200	896,7	81,99%
14300	980,1	84,64%
14400	1065,9	87,01%
14500	1154,0	89,10%
14600	1244,0	90,92%
14700	1335,8	92,50%
14800	1429,0	93,85%
14900	1523,4	95,00%
15000	1618,9	95,96%
15100	1715,3	96,76%
15200	1812,4	97,42%
15300	1910,1	97,96%
15400	2008,3	98,40%
15500	2106,9	98,76%

Figura 5

E poi, facciamo il grafico del delta. Lo sottolineo ancora una volta: questo è il grafico del delta di quell'opzione e di quella determinata scadenza, al variare del sottostante. Non è il delta della chain!

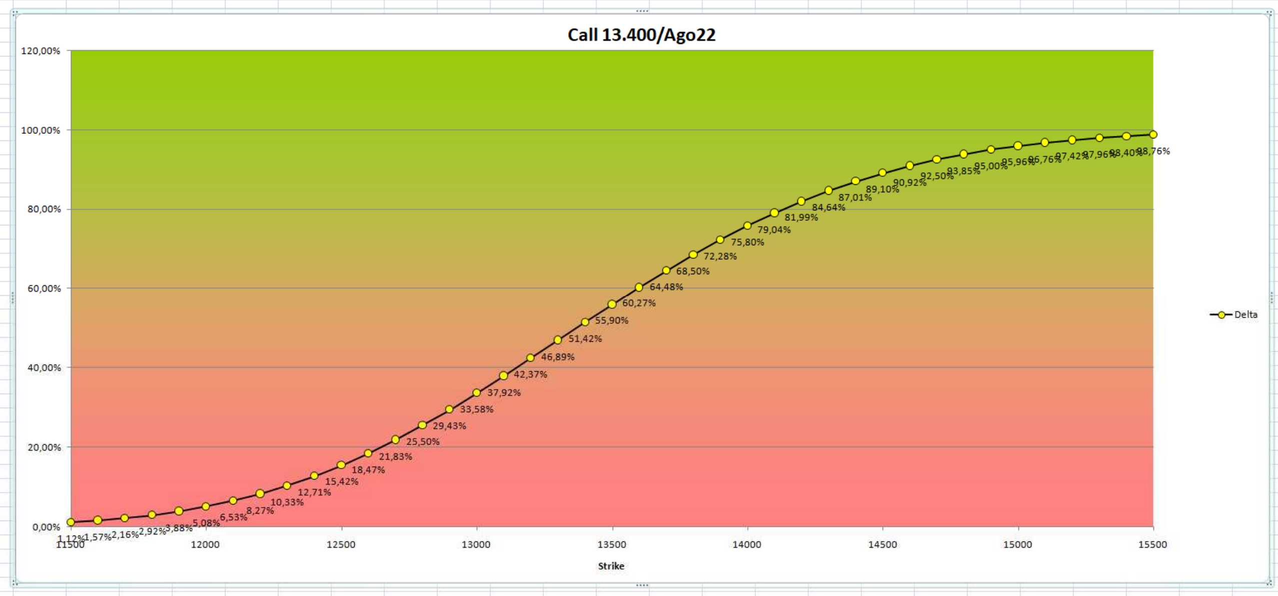

Figura 6

Ed ora, ricordiamo il significato geometrico della derivata: questa è la pendenza, in un punto alla curva. Quindi il gamma, è la pendenza del delta. Ora, provate, per ogni punto della curva, a tracciare la relativa tangente geometrica. Che cosa otterrete? Una pendenza inizialmente piccola, che poi cresce toccando il suo massimo attorno all'ATM e poi torna a decrescere. Esattamente la curva del gamma di figura 4.

Comunque, per verifica, confrontare ciò che vi ho chiesto di fare con quanto ho fatto io nella figura successiva.

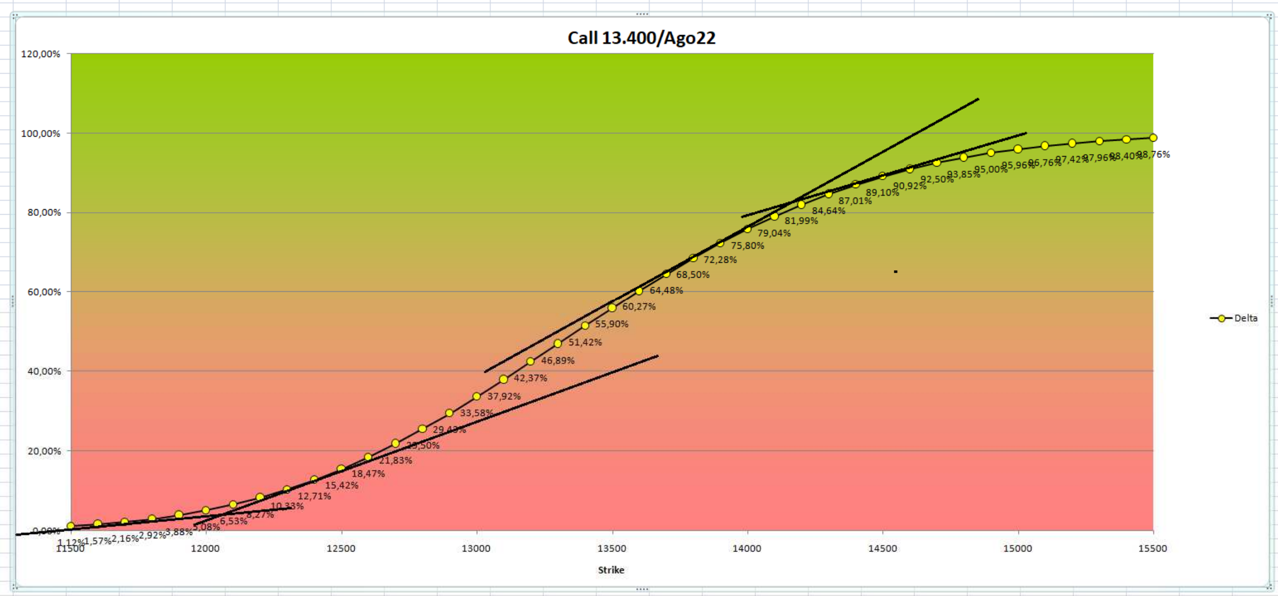

Figura 7

Notate? Osservate l'angolo che la retta tangente forma con l'asse orizzontale: inizialmente piccolo, poi aumenta, raggiunge un massimo e poi torna a diminuire.

Ed ora, come promesso, eccomi qui a farvi vedere che il gamma di Call e Put, pari strike e scadenza, è il medesimo. In figura successiva abbiamo l'andamento del delta della PUT 13.400/Ago22. Che cosa osserviamo? Che è esattamente lo stesso grafico. Mi riferisco al profilo della curva, non ai valori. Ed è quello che conta. Perché il gamma è la derivata del delta e, pertanto, se andiamo a disegnare le tangenti geometriche ai vari punti della curva, otteniamo gli stessi valori di angolo.

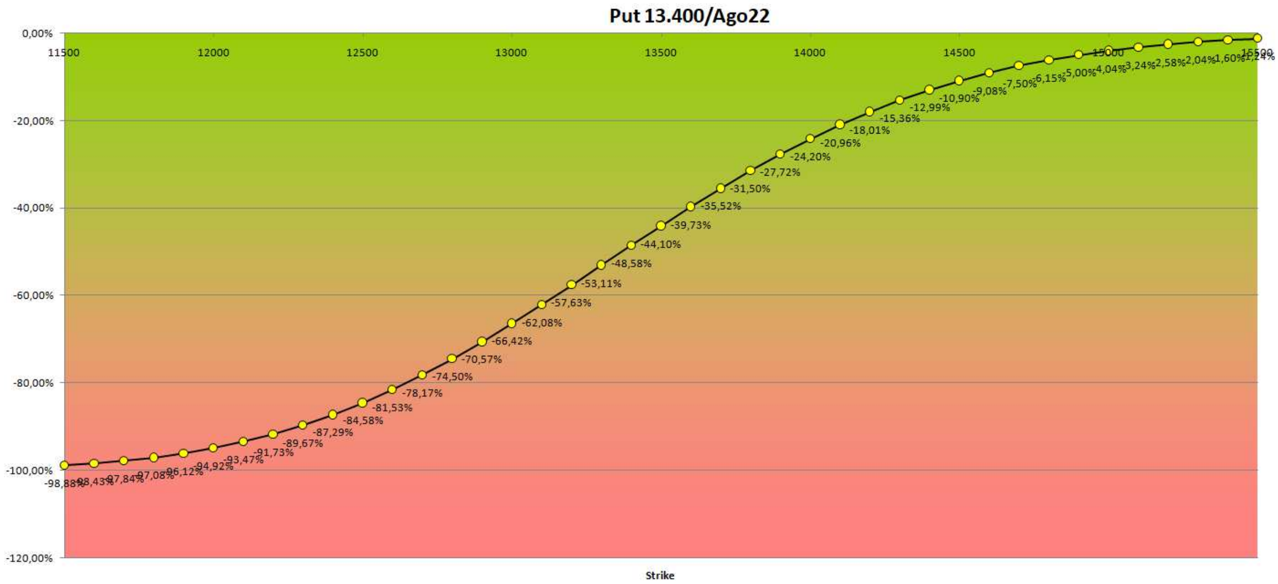

Figura 8

Se volete convincervene ancor più, provate a fare la stima del gamma come abbiamo fatto prima per la Call.

Vi riporto la tabella dei valori che ha generato il grafico di figura 8.

Andamento di prezzo, delta e gamma della Put 13.400/Ago22

Sottostante	Prezzo	DeltaPut
11500	1900,5	-98,88%
11600	1801,8	-98,43%
11700	1703,7	-97,84%
11800	1606,2	-97,08%
11900	1509,6	-96,12%
12000	1414,1	-94,92%
12100	1319,9	-93,47%
12200	1227,2	-91,73%
12300	1136,5	-89,67%
12400	1048,0	-87,29%
12500	962,0	-84,58%
12600	878,9	-81,53%
12700	799,1	-78,17%
12800	722,7	-74,50%
12900	650,1	-70,57%
13000	581,6	-66,42%
13100	517,4	-62,08%
13200	457,5	-57,63%
13300	402,1	-53,11%
13400	351,3	-48,58%
13500	305,0	-44,10%
13600	263,1	-39,73%
13700	225,4	-35,52%
13800	192,0	-31,50%
13900	162,4	-27,72%
14000	136,4	-24,20%
14100	113,9	-20,96%
14200	94,4	-18,01%
14300	77,7	-15,36%
14400	63,6	-12,99%
14500	51,7	-10,90%
14600	41,7	-9,08%
14700	33,4	-7,50%
14800	26,6	-6,15%
14900	21,1	-5,00%
15000	16,6	-4,04%
15100	12,9	-3,24%
15200	10,0	-2,58%
15300	7,7	-2,04%
15400	5,9	-1,60%
15500	4,5	-1,24%

Figura 9

Ora supponiamo che il sottostante passi da 13.000 a 13.100. Che accadrà alla nostra Put? Che perderà di valore (da 581 a 517, circa). E cosa succederà al delta? Che diverrà, in valore assoluto, più piccolo: infatti passa da -66,42% a -62,08%. Bene. Facciamo allora la stima del gamma.

$$\Gamma \cong \frac{\Delta(13.100) - \Delta(13.000)}{13100 - 13000} = \frac{-62{,}08\% - (-66{,}42\%)}{100} = \frac{-0{,}6208 + 0{,}6642}{100} = 0{,}000434$$

Se prendiamo i dati della Call, per la medesima variazione (riferitevi alla figura 5) si ottiene:

$$\Gamma \cong \frac{\Delta(13.100) - \Delta(13.000)}{13100 - 13000} = \frac{37{,}92\% - 33{,}58\%}{100} = \frac{0{,}3792 - 0{,}3358}{100} = 0{,}000434$$

I valori, come volevasi dimostrare, coincidono: sia in modulo che in segno.

Legge oraria del moto applicata al mondo delle opzioni.

La legge oraria del moto che abbiamo ricavato per determinare la posizione futura di un corpo che parte da una certa pozione, con una determinata velocità iniziale e con una certa accelerazione, è applicabile al mondo delle opzioni? Diciamo di si, con alcuni limiti. Allora, cerchiamo di capire. La formula seguente, come ricorderete, è la nostra legge oraria.

$$s = s_0 + v_0 t + a_m \frac{t^2}{2}$$

Come va modificata per i nostri scopi? Allora, ragioniamo. Il primo cambiamento che dobbiamo fare è quello della variabile indipendente: nel caso della legge oraria è il tempo; mentre, nel caso delle opzioni, è il sottostante. Il secondo cambiamento riguarda la variabile dipendente: nel caso della legge oraria è lo spazio percorso, mentre nel caso delle opzioni è il prezzo dell'opzione stessa. Pensateci un momento: nel caso della legge oraria abbiamo un corpo che si muove al trascorrere del tempo. Nel caso delle opzioni abbiamo il prezzo di una Call (o di una Put) che varia al variare del sottostante.

Altro cambiamento: la velocità, diviene qui il delta. E, infine, l'accelerazione va sostituita con il gamma. Secondo lo schema qui indicato (nel caso di una Call):

$$s \to c \qquad t \to S \qquad v_0 \to \Delta \qquad a_m \to \Gamma$$

Proviamo, quindi, a scrivere la legge:

$$c = c_0 + \Delta S + \Gamma \frac{S^2}{2}$$

Facciamo un esempio. Supponiamo di voler sapere come aumenta il prezzo della Call 13.400, quando il sottostante passa da 13.200 a 13.400. Dotiamoci dei dati che ci occorrono facendo riferimento alla figura 10. Si tratta dell'andamento della Call 13.400, sottostante Dax, scadenza agosto 2022, con volatilità implicita a 23%. Cominciamo dal prezzo che la Call mostra quando il sottostante vale 13200:

$$c_0 = 259{,}9$$

Passiamo alla velocità iniziale di crescita, ovvero il delta:

$$\Delta = 42{,}37\%$$

e, quindi, alla sua accelerazione, ovvero il gamma:

$$\Gamma = 0{,}000459628$$

Ed ora applichiamo la formula:

$$c = c_0 + \Delta S + \Gamma \frac{S^2}{2} = 328{,}2 + 42{,}37\% \cdot 200 + 0{,}000459628 \cdot \frac{200^2}{2} = 353{,}8$$

Risultato abbastanza preciso. Anche perché i dati della figura 10 sono stati ottenuti nell'ipotesi di volatilità implicita costante. Nel mondo reale, invece, l'andamento della volatilità implicita posseduta dai vari strike subisce l'effetto smile (che tratteremo successivamente). Vi sono poi ulteriori limiti che divengono evidenti quando consideriamo variazioni più ampie del sottostante. Ciò a causa della non costanza del gamma e del delta.

Aggiungo, inoltre, che il governo del prezzo di un'opzione deve necessariamente tener conto anche dell'effetto del tempo a scadenza dei contratti di opzione e delle variazioni della volatilità implicita che il market maker decide di attuare sulla base delle condizioni di mercato presenti (e, soprattutto, attese).

Andamento di prezzo, delta e gamma della Call 13.400/Ago22

Sottostante	Prezzo	DeltaCall	Gamma
11500	2,9	1,12%	5,28303E-05
11600	4,2	1,57%	6,88232E-05
11700	6,1	2,16%	8,79452E-05
11800	8,6	2,92%	0,000110286
11900	12,0	3,88%	0,000135787
12000	16,4	5,08%	0,000164217
12100	22,2	6,53%	0,000195158
12200	29,6	8,27%	0,000228006
12300	38,9	10,33%	0,000261984
12400	50,3	12,71%	0,00029617
12500	64,4	15,42%	0,000329542
12600	81,3	18,47%	0,000361034
12700	101,4	21,83%	0,000389588
12800	125,1	25,50%	0,000414227
12900	152,5	29,43%	0,000434103
13000	184,0	33,58%	0,000448553
13100	219,7	37,92%	0,00045713
13200	259,9	42,37%	0,000459628
13300	304,5	46,89%	0,000456086
13400	353,6	51,42%	0,000446775
13500	407,3	55,90%	0,000432172
13600	465,4	60,27%	0,000412927
13700	527,8	64,48%	0,000389812
13800	594,3	68,50%	0,00036368
13900	664,7	72,28%	0,000335411
14000	738,8	75,80%	0,00030587
14100	816,2	79,04%	0,000275871
14200	896,7	81,99%	0,000246143
14300	980,1	84,64%	0,00021731
14400	1065,9	87,01%	0,000189883
14500	1154,0	89,10%	0,000164247
14600	1244,0	90,92%	0,000140673
14700	1335,8	92,50%	0,00011932
14800	1429,0	93,85%	0,000100253
14900	1523,4	95,00%	8,34537E-05
15000	1618,9	95,96%	6,88406E-05
15100	1715,3	96,76%	5,62829E-05

Figura 10

Ma, ancora una volta: questo ragionamento non ha lo scopo di fornire una metodologia di calcolo alternativa alla B&S. Lo scopo è quello di far vedere come si muove il prezzo di un'opzione. Così, come un grave che viene lanciato da una certa altezza, si sposta aumentando sempre più la sua velocità fino a che non tocca terra, così il prezzo di un'opzione - Call in questo caso - aumenta, se il sottostante aumenta, con velocità delta ed accelerazione gamma che ne regolano la variazione del prezzo medesimo.

Mi fermo qui, per il momento, rimandando ad un successivo articolo gli ulteriori e necessari approfondimenti di queste due greche.

Buon lavoro!