Delta e gamma (parte terza)

Premessa

Scopo del presente articolo è mostrare che le greche, che da un lato ci mostrano come varia il prezzo di un'opzione al variare, per esempio, del sottostante, variano anch'esse. Variano al trascorrere del tempo e variano al variare della volatilità implicita (trascuriamo i tassi di interesse ed i dividendi).

Incidentalmente, come mostrerò più avanti, faremo la conoscenza di una greca del secondo ordine che è definita come derivata parziale mista. Incidentalmente, perché queste greche saranno oggetto di ulteriore approfondimento in successivi articoli.

Ritorno alla matematica (e alla fisica)

In un precedente articolo abbiamo fatto vedere come rappresentare una funzione di due variabili, del tipo:

$$z = z(x, y)$$

(che leggiamo così: "z è funzione di x ed y"; oppure, "z dipende da x e da y").

Si tratta di una rappresentazione nello spazio (ricordate il paraboloide?) che, sicuramente, ha un suo fascino ma che ha molti svantaggi: non facile da disegnare e nemmeno facile da leggere. Insomma, per un tecnico che la deve usare, non è certo il massimo. E allora? E allora esistono altre modalità di rappresentazione più abbordabili e leggibili. Si tratta delle curve parametriche. Cerchiamo di capire come funzionano in quanto, successivamente, le applicheremo anche al nostro mondo, quello delle opzioni.

Partiamo da qualche esempio.

Le curve (o caratteristiche) di uscita di un transistore

Il transistor è un componente tripolare, scoperto nei primi anni '50 del secolo scorso, che rappresentò un vero momento di svolta nella storia dell'elettronica (e tanta influenza ha avuto, poi, nel mondo dell'informatica, della tecnologia e, tutto sommato, del nostro attuale modo di vivere!).

Il suo simbolo elettrico è mostrato in figura 1.

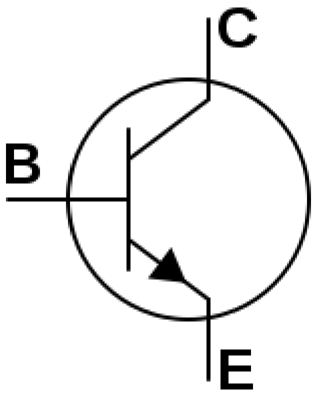

Figura 1

Attraverso i tre terminali, che prendono il nome di collettore, base ed emettitore, abbiamo ingresso di cariche elettriche nel componente ed uscita delle stesse. E dal momento che un movimento di cariche elettriche costituisce una corrente elettrica, avremo: I_B, la corrente di base, I_C, la corrente di collettore e I_E, quella di emettitore. Oltre che da queste tre correnti, il funzionamento di un transistor dipende anche da tre tensioni elettriche: V_{BE} (tensione tra base ed emettitore), V_{CE} (tensione tra collettore ed emettitore), V_{BC} (tensione tra base e collettore).

Ora, provate ad immaginare a quale tipo di curve danno origine queste 6 variabili (un po', come nel nostro mondo, quello delle opzioni). E allora? Che si fa? Si usano le curve parametriche. Il costruttore, nel data sheet (una sorta di fascicoletto di una decina di pagine con grafici, tabelle ed equazioni che descrivono il funzionamento di quel transistor, con quella sigla commerciale), usa questa modalità di rappresentazione che, rispetto a quella spaziale, per il tecnico che deve usarla è più pratica. Vediamo un esempio.

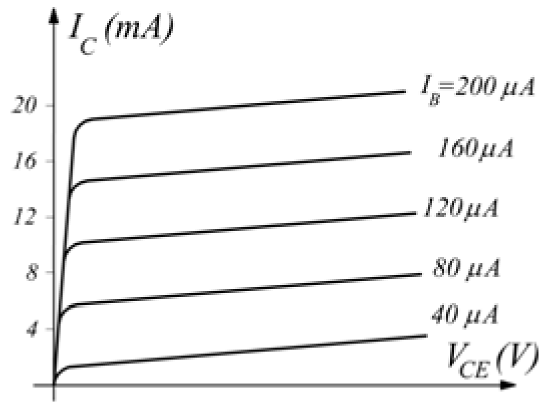

Figura 2

La figura 2 mostra le curve, o caratteristiche, di uscita di un transistore BJT npn. Osservate cosa abbiamo sugli assi: sull'asse delle y, quello verticale, abbiamo la corrente di collettore (espressa in mA, milliampere) e sull'asse delle x, quello orizzontale, abbiamo la tensione tra collettore ed emettitore (espressa in V, volt). Il parametro è la corrente di base (espressa in µA, microampere). E come deve leggerle un tecnico? Vediamolo nella figura successiva.

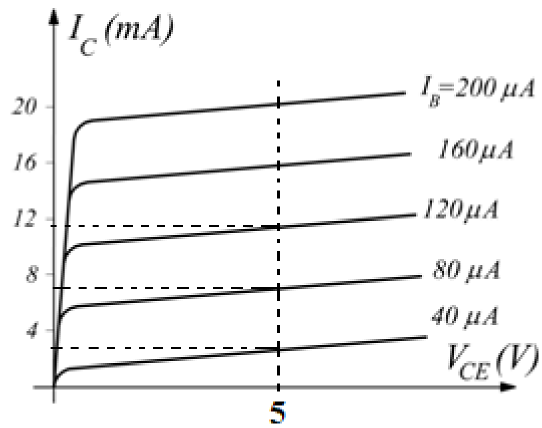

Figura 3

Supponiamo di voler rispondere alla seguente domanda:

se la tensione tra collettore ed emettitore vale 5 V e la corrente di base vale 40 µA, quanto varrà la corrente di collettore?

Allora, nell'ambito della famiglia di curve, dobbiamo individuare quella relativa alla corrente di base che vale 40 µA (nel grafico di figura 3, è la prima a partire dal basso). Poi sull'asse delle ascisse, andiamo a cercare 5 V e da quel punto facciamo partire un segmento verticale che va ad incrociare proprio tale curva. Dal punto di incrocio, tiriamo un segmento orizzontale che va ad intersecare l'asse della I_C. E leggiamo, all'incirca, un valore di 3 mA. E se cambia la corrente di base? Provate a rispondere alla seguente domanda:

se la tensione tra collettore ed emettitore vale 5 V e la corrente di base vale 120 µA, quanto varrà la corrente di collettore?

Se fate tutto correttamente dovreste pervenire ad un valore poco inferiore a 12 mA. Ci siete?

Resistenza elettrica in funzione della temperatura

Ed ora un altro esempio, questa volta tratto dallo studio dell'elettrotecnica, che mostra l'andamento della resistenza elettrica in funzione della temperatura. Un qualunque materiale presenta caratteristiche di resistenza elettrica il cui valore varia al variare della temperatura. I materiali conduttori, in particolare, mostrano un andamento di questa grandezza fisica che cresce al crescere della temperatura.

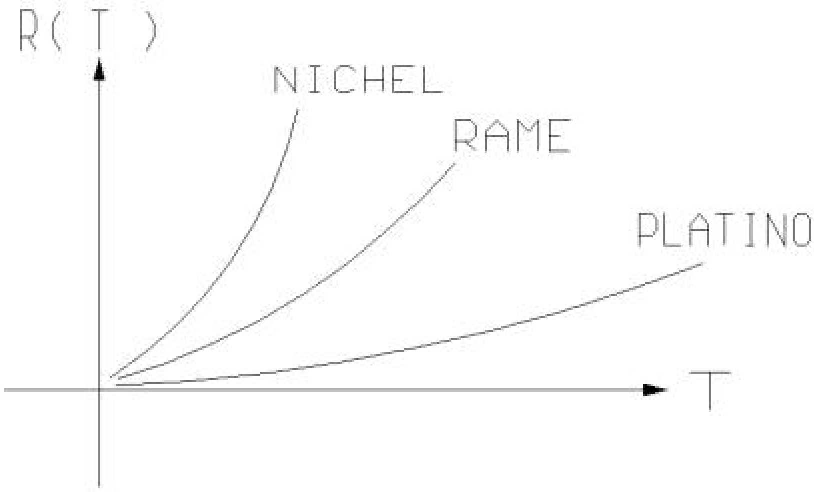

Figura 4

Come si nota dalla figura 4, però, l'andamento non è lo stesso per tutti i materiali. Più in particolare, abbiamo una famiglia di curve ognuna delle quali è caratterizzata da un particolare valore di resistenza specifica (o resistività) generalmente indicata con la lettera ρ (leggi "ro"). Tale grandezza, matematicamente parlando, costituisce il parametro della famiglia di curve.

Variabilità del delta in funzione del tempo

Spero che gli esempi proposti possano contribuire alla costruzione di quell'approccio mentale che ci occorre per affrontare lo studio della variabilità del delta.

Cominciamo, induttivamente, con l'analisi del delta di tre chain – opzioni call – riferite a tre differenti scadenze:

- la prima scadenza mensile, 19/08/2022 (grafico a pallini gialli);
- la prima trimestrale, 16/09/2022 (grafico a quadratini rossi);
- la prima semestrale, 16/12/2022 (grafico a triangolini neri);

La rilevazione si riferisce alle ore 12:00 circa, del 5/8/2022, con il Dax (indice) a 13.640 circa.

Scrivevo induttivamente in quanto l'idea è quella di andare ad analizzare tale grafico, fare qualche osservazione e poi, cercare di generalizzare quanto osservato.

Riportiamo il tutto su un grafico, figura 5, ed ecco la comparsa di tre curve parametriche dove il parametro è la scadenza di quel contratto di opzione.

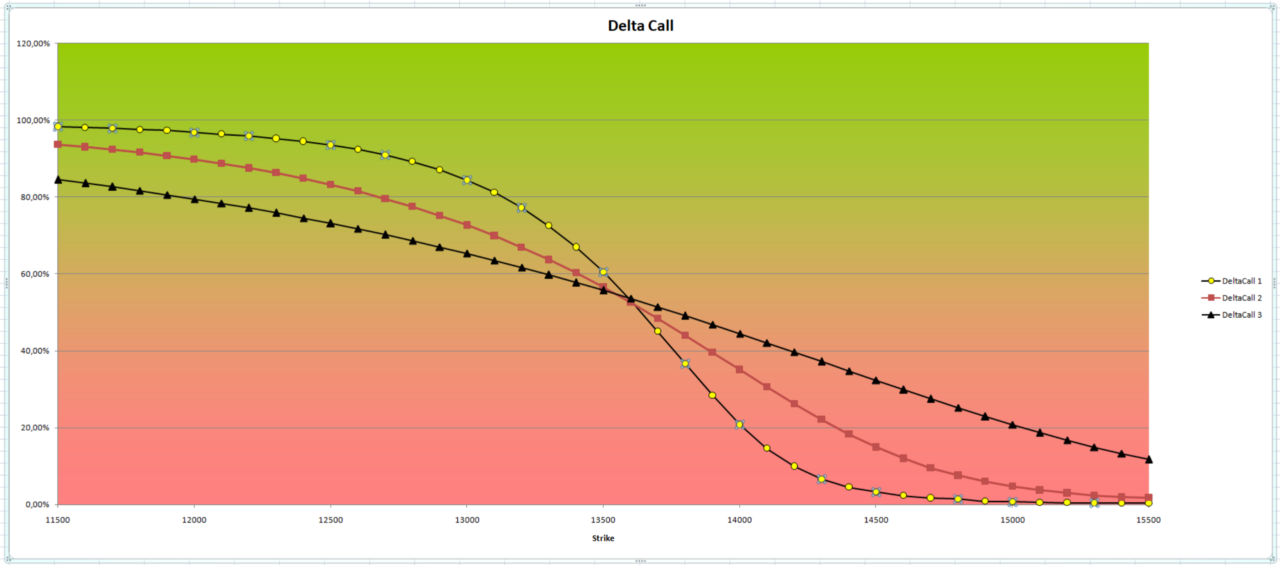

Figura 5

Incrocio al 50% del delta (circa)

Una prima osservazione è che queste tre curve si incrociano in un punto che, ad occhio, dovrebbe corrispondere al valore del sottostante rilevato nel momento della lettura dei dati. E, in corrispondenza di tale valore del sottostante, il delta ha un valore attorno al 50%: siamo nei pressi dell'ATM.

Calcolatore Opzioni (B&S)			
Spot:	13.500		
Strike:	13.500		
Vol_Impl	20%		
Scadenza 1:	19/08/2022 13:00	giorni:	0,030124
Delta_1:	50,78%		
Scadenza 2:	16/09/2022 13:00	giorni:	0,106836
Delta_2:	51,47%		
Scadenza 3:	16/12/2022 13:00	giorni:	0,356151
Delta_3:	52,68%		

Figura 6

Facciamo una verifica col nostro calcolatore. In figura 6 ho riportato il valore che assume il delta, per una call il cui strike (13.500) coincide col valore del sottostante (13.500), per tre diverse scadenze: 19 agosto, 16 settembre e 16 dicembre. Notate che il valore è vicino al 50%, leggermente superiore. E, man mano che ci allontaniamo con la scadenza, il valore del delta cresce leggermente. Come potete notare non ho toccato il valore della volatilità implicita, costante per tutte le tre scadenze e pari al 20%.

Un effetto analogo è giocato dalla volatilità implicita e ve lo mostro in figura 7, dove è indicato il valore del delta per la medesima call, col medesimo valore del sottostante e della scadenza, per tre differenti valori di volatilità implicita (10%,20% e 30%). Anche qui, notate che il valore è vicino al 50%, leggermente superiore. E, man mano che aumenta la volatilità implicita, il valore del delta cresce leggermente

Calcolatore Opzioni (B&S)			
Spot:	13.500		
Strike:	13.500		
Scadenza:	16/09/2022 13:00	giorni:	0,106812
Vol_Impl 1:	10%		
Delta_1:	50,98%		
Vol_Impl 2:	20%		
Delta_2:	51,47%		
Vol_Impl 3:	30%		
Delta_3:	52,06%		

Figura 7

Dalla pendenza del delta … al gamma

Proseguiamo. Osserviamo la pendenza di queste tre curve a partire da quella che si riferisce alla scadenza più ravvicinata (pallini gialli). Se, a partire dal punto di incrocio, ci spostiamo verso destra, notiamo che la pendenza tende a diminuire. Più ci allontaniamo e più la pendenza diminuisce. La stessa cosa, se notiamo con attenzione, accade se, a partire dal punto di incrocio, ci spostiamo verso sinistra. Tale pendenza, invece, tende a crescere man mano che ci avviciniamo al punto di incrocio, dove diviene massima. Ora, la pendenza del delta, se ricordiamo bene, corrisponde al gamma. E allora, andiamo a vedere la corrispondente curva del gamma (figura 8). Si nota che il gamma fa il picco in corrispondenza (quasi) dell'ATM: ed è giusto, perché è in quel punto che la pendenza è massima!

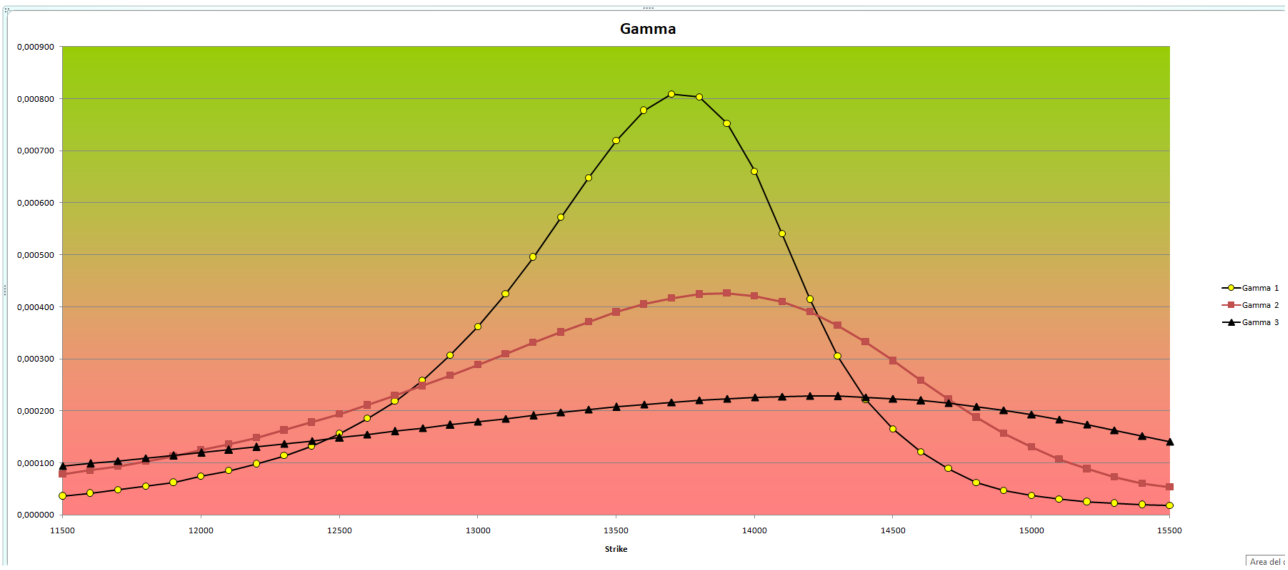

Figura 8

Naturalmente un analogo comportamento lo osserviamo per le altre due curve: quadratini rossi e triangolini neri. La differenza è che, man mano che la scadenza si allontana, la curva del delta diviene più dolce e la pendenza diminuisce. E infatti, troviamo, per il gamma, un picco sempre più basso man mano che la scadenza si allontana.

Come cambiano le cose se il mercato è in backwardation?

Ed ora facciamo un'altra osservazione. Quando calcoliamo il gamma, di quali valori abbiamo bisogno? O, per dirla in modo più formale, quali sono le variabili indipendenti della greca gamma? Cerco di rendervela il più possibile semplice.

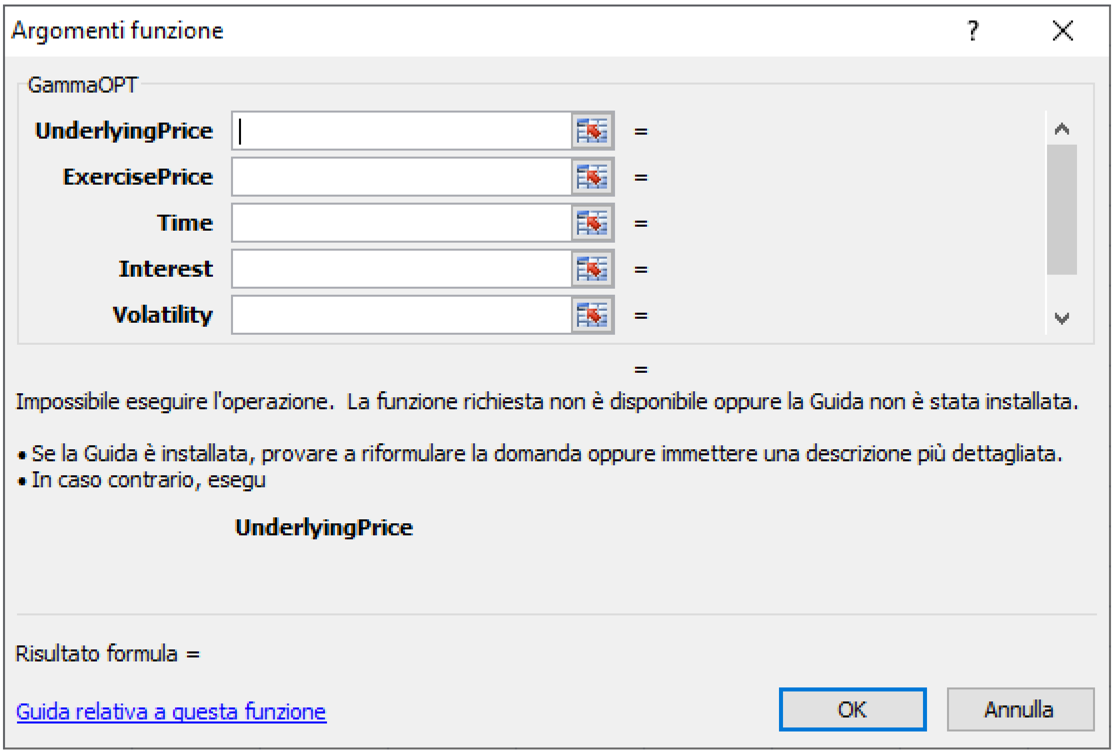

Figura 9

La figura 9 ci mostra la maschera che Excel propone all'utente quando gli chiediamo di calcolare questa greca. Quindi, a partire dall'alto, abbiamo:

- il valore del sottostante;
- il prezzo di esercizio;
- la vita residua del contratto;
- il tasso di interesse privo di rischio;
- la volatilità implicita.

In effetti, c'è un'altra riga, che però in figura non si vede, relativa ad eventuali dividendi. Che a noi non interessano (immaginando di lavorare con un indice total return come il Dax).

Ora, seguitemi. Se noi fissiamo i primi quattro parametri, il gamma non può che dipendere dalla volatilità implicita. E si tratta di una dipendenza inversa. Ve lo faccio vedere, sempre con il nostro calcolatore, in figura 10.

Abbiamo fissato tutte le variabili tranne la volatilità implicita. Che cosa osservate? Innanzitutto, che il gamma cambia al modificarsi della volatilità implicita. E, seconda osservazione, che più la volatilità implicita cresce più diminuisce il gamma e viceversa.

Calcolatore Opzioni (B&S)				
Spot:	13.500			
Strike:	13.500			
Scadenza:	16/09/2022 13:00		giorni:	0,106334
VolImpl_1	15%			
Gamma_1:	0,000604			
VolImpl_2	25,00%			
Gamma_2:	0,000362			
VolImpl_3	40,00%			
Gamma_3:	0,000226			

Figura 10

Quindi, sulla base della forma che assume lo smile della volatilità implicita (approfondiremo gli aspetti legati alla volatilità implicita in un altro articolo) avremo una diversa forma della curva del gamma. Ad esempio, questa mattina, 09/08/2022, alle ore 12:30 circa, rilevo le curve mostrate in figura 11.

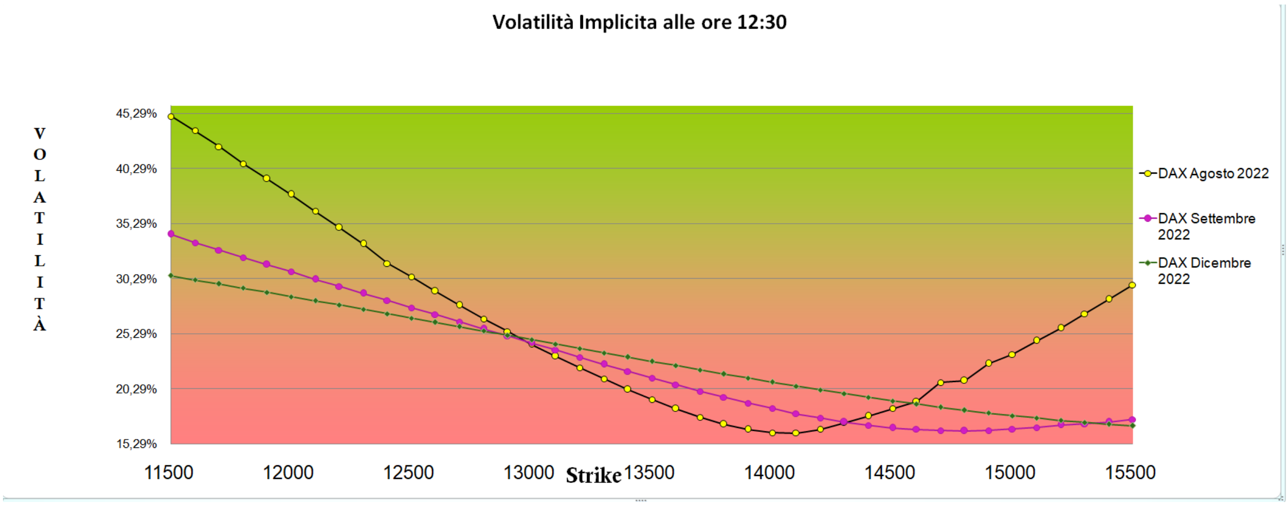

Figura 11

Si tratta di curve tipiche di un mercato in contango con la scadenza breve, ormai prossima al termine del contratto, che si impenna in corrispondenza degli strike in zona ITM ed in zona OTM.

Ed ora andiamo ad analizzare il gamma, di queste tre chain (figura 12).

Notate che tra 13.000 e 14.500 circa, dove la volatilità implicita è più bassa per la scadenza breve, il gamma, di tale scadenza, è più alto del gamma delle altre due scadenze.

Mentre, prima di 13.000 circa e dopo 14.500 circa, dove la volatilità implicita è più alta per la scadenza breve, il gamma, di tale scadenza, è più basso del gamma delle altre due scadenze.

Ovviamente, anche le altre due scadenze, rossa e verde, osservano lo stesso comportamento tra loro.

Quindi, in un mercato in backwardation, dovremmo attenderci, per il gamma, un comportamento diametralmente opposto.

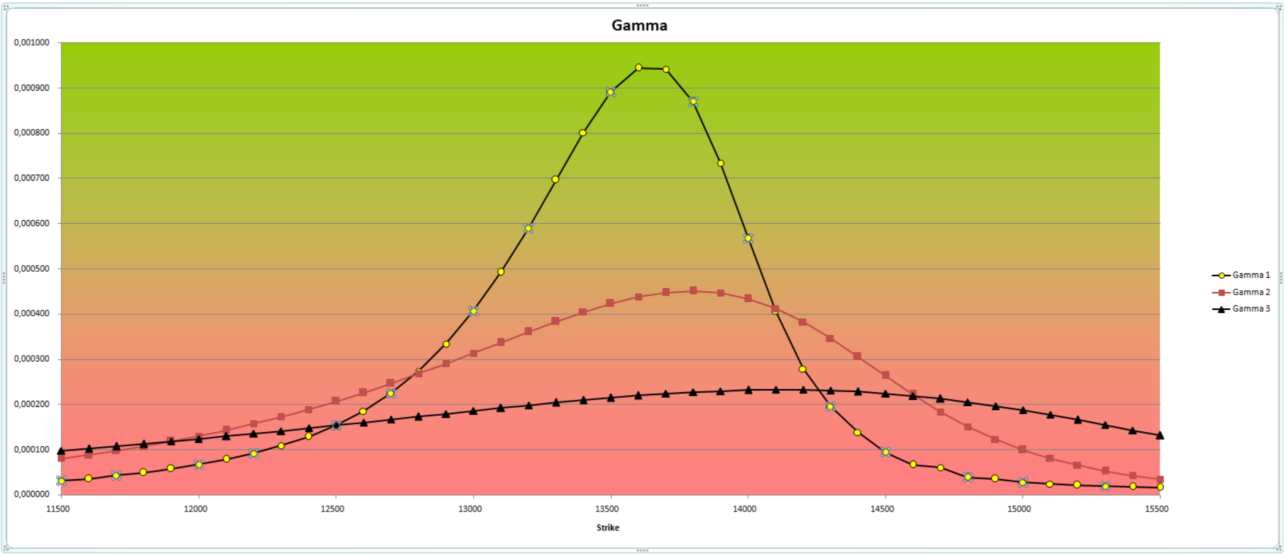

Figura 12

Effetto gamma

Un gamma più pronunciato significa che il delta cambia più velocemente. E questo effetto è tanto più marcato quanto più ci avviciniamo alla scadenza dell'opzione: si tratta del noto "effetto gamma", presente in letteratura, che indica la difficoltà di gestire un portafoglio di opzioni – su strategie *delta neutral* - quando siamo vicini alla scadenza ed il sottostante è particolarmente volatile. Va da sé che se ci vogliamo tenere alla larga da tale effetto, occorrerà costruire portafogli con opzioni aventi scadenza la più lontana possibile, compatibilmente, poi, con una sufficiente efficacia di negoziazione con il market maker.

E, a scanso di equivoci, tali portafogli dovrebbero trovare un naturale esaurimento del proprio tempo di vita prima della scadenza dei contratti delle opzioni che vi fanno parte: diversamente, andremmo a ricadere nel dominio dell'effetto gamma!

Una nuova greca? Incidentalmente?

Incidentalmente, spero sia ovvio per tutti, è solo un'astuzia narrativa: non è assolutamente incidentale! Ma andiamo per ordine. Che cosa è questa greca?

Ancora una volta, vi invito a dotarvi della pazienza e del tempo necessari per affrontare questo ulteriore sforzo.

Allora, abbiamo fatto vedere come varia il delta al trascorrere del tempo. E, per far ciò, ci siamo avvalsi dell'espediente, potremmo dire così, delle curve parametriche, in luogo delle curve spaziali, più belle ed eleganti sicuramente che, però, non sono così facilmente gestibili.

Ora, la variabilità del delta, rispetto al tempo, è regolata da questa greca che viene indicata col nome di ***charm***.

Formalmente, quindi, scriveremo:

$$\text{charm} = \frac{\partial \Delta}{\partial t}$$

ma anche, visto che il delta è la derivata parziale prima rispetto al sottostante:

$$\text{charm} = \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial t}$$

nel caso di una call (per la put, formalmente, è la stessa cosa). Quindi, ancora una volta, siamo di fronte ad una greca del secondo ordine, come per il gamma. Con la differenza, però, che il gamma si ottiene derivando il prezzo dell'opzione rispetto al sottostante, una volta e poi, il risultato, derivandolo nuovamente rispetto al sottostante. Qui, per lo charm, deriviamo il prezzo dell'opzione rispetto al sottostante e poi, il risultato ottenuto, lo deriviamo rispetto al tempo. Per tale motivo diciamo che lo charm è una *derivata parziale mista*.

Ora (sento già qualche domanda), ma l'ordine con cui deriviamo, è importante? Si e no. O, meglio, in generale lo è. Nel senso che se prendiamo una funzione di due variabili e deriviamo prima rispetto ad una di esse e, dopo, rispetto all'altra, e poi ripetiamo l'operazione invertendo l'ordine di derivazione, non è detto che si ottenga lo stesso risultato. E allora? Che si fa?

E qui, dal momento che siamo fortunati, ci viene in soccorso un matematico polacco, H. Schwarz (1843,1921), che visse tra la seconda metà dell'Ottocento e la prima metà del Novecento, e che si occupò dello studio di tale problema. Egli enunciò (e dimostrò) un teorema che afferma che sotto determinate ipotesi, l'ordine di derivazione, in una derivata parziale mista, è ininfluente.

Se

$$z = f(x, y)$$

è una funzione in due variabili definita su un insieme aperto di R^2 che ammette derivate seconde miste continue, allora queste coincidono in ogni punto del dominio di f stessa. In sostanza:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Ora, la vera domanda che dovreste porvi è: ma, le funzioni delle nostre opzioni, c e p, rispettano le ipotesi richieste dal teorema di Schwarz? Ebbene si, le rispettano.

E qui, anticipandovi qualcosa che farà parte di articoli successivi, affermo che, se questo è vero, vuol dire che:

$$\text{charm} = \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial t \partial S}$$

e, siccome:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S \partial t} = \frac{\partial \Delta}{\partial t}$$

allora deve valere anche:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial t \partial S} = \frac{\partial \Theta}{\partial S}$$

essendo:

$$\Theta = \frac{\partial c}{\partial t}$$

una greca del primo ordine, (Θ, lettera maiuscola dell'alfabeto greco, leggi "*teta*"), che indica la variazione del prezzo di un'opzione al variare del tempo. Lo studio del theta sarà affrontato successivamente.

Questo risultato è particolarmente notevole: vuol dire, infatti, che possiamo giungere allo charm sia derivando il delta rispetto al tempo che derivando il theta rispetto al sottostante! Intrigante, no?

Ora, rimando l'interpretazione geometrica dello charm, il suo range di variabilità e, soprattutto, il suo significato e le sue possibilità di impiego ad un articolo successivo. Non vorrei aver messo troppa carne al fuoco.

Conclusioni

Siamo giunti al terzo articolo inerente queste due greche e non è ancora finita (dobbiamo far vedere, ad esempio, come variano delta e gamma al variare della volatilità implicita).

Però, ora, ne dovreste sapere un po' di più (almeno lo spero).

Buon lavoro!