

Delta e gamma (parte quarta)

Premessa

Proseguiamo il discorso che abbiamo lasciato nello scorso articolo cercando di indagare come il variare della volatilità implicita conduca ad una variazione delle greche delta e gamma. Anche qui, come la scorsa volta, faremo una breve conoscenza di alcune greche del secondo e terzo ordine. Breve, in quanto tali greche verranno approfondite in articoli successivi.

Variazione del delta rispetto alla VI

Nel precedente articolo abbiamo fatto vedere cosa succede al delta quando varia il tempo. Abbiamo preso la chain di tre differenti scadenze, calcolato il delta per ciascuno strike, e poi abbiamo utilizzato le curve parametriche per confrontare l'andamento del delta; al variare dello strike, lungo l'asse orizzontale e al variare del tempo, spostandosi da una curva all'altra. Le curve ottenute sono sicuramente realistiche anzi, direi reali, in quanto abbiamo preso tutti i dati dal mercato fotografando, ad un certo istante di tempo, una data situazione.

Ora, invece, per studiare l'andamento del delta, al variare della volatilità implicita, dobbiamo fare qualcosa di meno realistico. In qualche modo, ne siamo obbligati. Ma andiamo per ordine e cerchiamo di capire perché.

AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG
strike	Vol.Imp. +0%	delta	Vol.Imp. +20%	delta	Vol.Imp. +40%	delta
11200	34,78%	84,80%	54,78%	75,70%	74,78%	71,14%
11300	34,24%	82,83%	54,24%	73,97%	74,24%	69,71%
11400	33,76%	80,65%	53,76%	72,15%	73,76%	68,26%
11500	33,21%	78,19%	53,21%	70,19%	73,21%	66,71%
11600	32,73%	75,56%	52,73%	68,21%	72,73%	65,18%
11700	32,23%	72,68%	52,23%	66,13%	72,23%	63,59%
11800	31,76%	69,57%	51,76%	63,98%	71,76%	61,97%
11900	31,27%	66,25%	51,27%	61,77%	71,27%	60,33%
12000	30,80%	62,68%	50,80%	59,47%	70,80%	58,65%
12100	30,32%	58,97%	50,32%	57,14%	70,32%	56,96%
12200	29,85%	55,06%	49,85%	54,76%	69,85%	55,24%
12300	29,42%	51,02%	49,42%	52,33%	69,42%	53,51%
12400	29,00%	46,88%	49,00%	49,87%	69,00%	51,76%
12500	28,61%	42,73%	48,61%	47,41%	68,61%	50,01%
12600	28,19%	38,49%	48,19%	44,90%	68,19%	48,23%
12700	27,79%	34,37%	47,79%	42,42%	67,79%	46,47%
12800	27,42%	30,37%	47,42%	39,96%	67,42%	44,72%
12900	27,09%	26,52%	47,09%	37,52%	67,09%	42,97%
13000	26,77%	22,91%	46,77%	35,12%	66,77%	41,24%
13100	26,45%	19,54%	46,45%	32,77%	66,45%	39,52%
13200	26,21%	16,50%	46,21%	30,50%	66,21%	37,83%
13300	25,97%	13,75%	45,97%	28,29%	65,97%	36,16%
13400	25,84%	11,43%	45,84%	26,23%	65,84%	34,57%
13500	25,78%	9,47%	45,78%	24,30%	65,78%	33,04%
13600	25,60%	7,65%	45,60%	22,36%	65,60%	31,48%
13700	25,62%	6,26%	45,62%	20,64%	65,62%	30,04%
13800	25,63%	5,08%	45,63%	19,01%	65,63%	28,64%
13900	25,76%	4,17%	45,76%	17,55%	65,76%	27,33%
14000	25,91%	3,41%	45,91%	16,18%	65,91%	26,06%
14100	26,10%	2,80%	46,10%	14,93%	66,10%	24,86%
14200	26,36%	2,33%	46,36%	13,80%	66,36%	23,73%

Figura 1

Oggi venerdì 23/09/2022, chiediamo al nostro amico market maker (si fa per dire) quali sono i prezzi bid-ask proposti sul Dax, quale sottostante, relativamente alla scadenza mensile prossima, 21/10/2022, quando l'indice quota 12.284 circa. Calcoliamo, quindi, la volatilità implicita ed il delta per ciascuno strike, relativamente alle opzioni Call. Poi, aggiungiamo ulteriori colonne nelle quali indicare una volatilità implicita aumentata del 20% e del 40%. E, a seguire, il relativo valore del delta. In sostanza, per ogni cella delle volatilità esuberate, prendiamo il valore della volatilità implicita effettiva ed aggiungiamo il 20%, per una colonna, ed il 40% per l'altra. Al termine di queste operazioni otteniamo la tabella di figura 1.

Facciamo alcune osservazioni.

Le opzioni ATM possiedono un delta, attorno al 50%, che non varia o, meglio, varia molto poco, al variare della volatilità implicita. Anche nello scorso articolo avevamo evidenziato, a proposito della variabilità del delta rispetto al tempo, che per le opzioni ATM non si assisteva ad una particolare variabilità del delta. In sostanza, potremmo dire che questa greca, intendo il delta, quando l'opzione è ATM, tende a rimanere costante, sia che vari il tempo sia che vari la volatilità implicita.

Notiamo, poi, il diverso comportamento del delta, al variare della volatilità implicita, sulla base della moneyness:

- per le opzioni ITM, se la volatilità implicita sale il delta diminuisce; in sostanza, per queste opzioni, un aumento della volatilità implicita rende meno probabile che l'opzione stessa scada in the money. Ma perché? Perché con una bassa volatilità implicita ci aspettiamo che il mercato, da qui alla scadenza, mostrerà oscillazioni dei prezzi contenute. E quindi, un'opzione che è già ITM, è destinata a scadere ITM.
- per le opzioni OTM, accade il contrario: un aumento della volatilità implicita rende più probabile che esse scadano in the money. In questo caso, infatti, una maggiore volatilità implicita ci consegna un mercato che, da qui alla scadenza, mostrerà oscillazioni dei prezzi molto più marcate. E quindi, un'opzione OTM, avrà maggiori probabilità di scadere ITM.

Ed ora passiamo dalla tabella di figura 1 al grafico di figura 2 dove, ripeto ancora una volta, osserveremo l'andamento del delta, al variare del sottostante, usando come parametro la volatilità implicita.

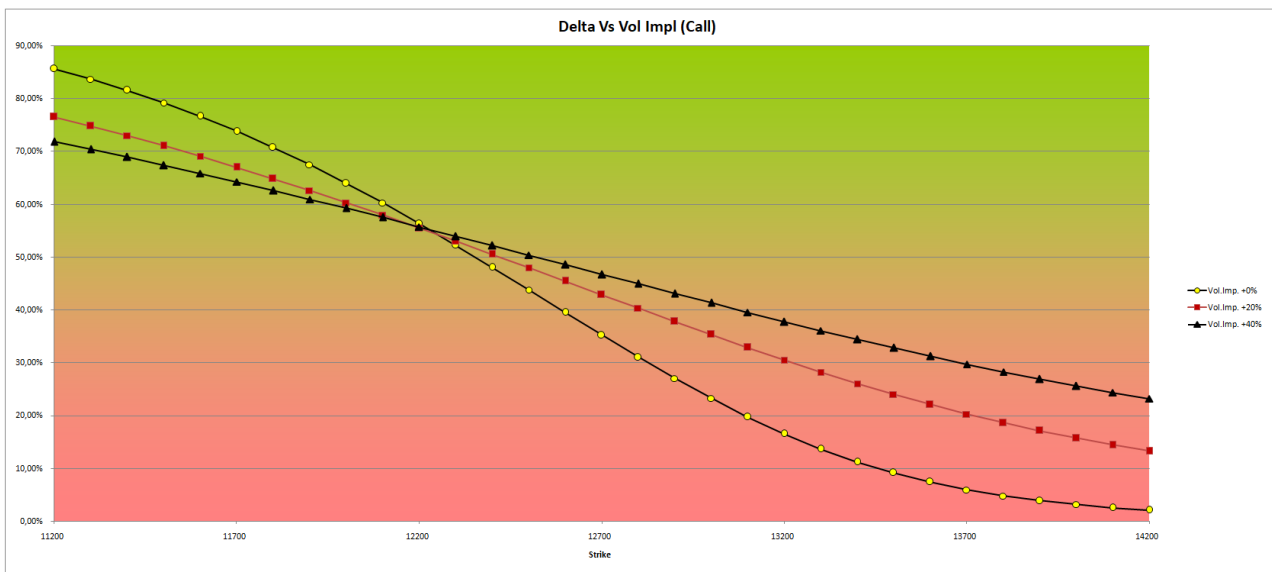


Figura 2

La curva a pallini gialli mostra l'andamento del delta, rispetto al sottostante, quando la volatilità implicita è quella prezzata dal mercato. La curva a quadratini rossi, invece, si riferisce ad una volatilità implicita aumentata del 20% rispetto a quella di mercato. Infine, quella a triangolini neri, è relativa ad una volatilità implicita aumentata del 40%.

Si nota, come già abbiamo scritto, che le tre curve incrociano in corrispondenza dello strike ATM e che, prima di tale strike, dove le opzioni sono ITM, il delta tende a diminuire all'aumentare della volatilità implicita.

Dopo tale incrocio, invece, dove gli strike divengono OTM, il relativo delta tende ad aumentare all'aumentare della volatilità implicita.

Ed ora passiamo alle opzioni Put.

Ometto la tabella e mostro subito il grafico, che è possibile osservare in figura 3.

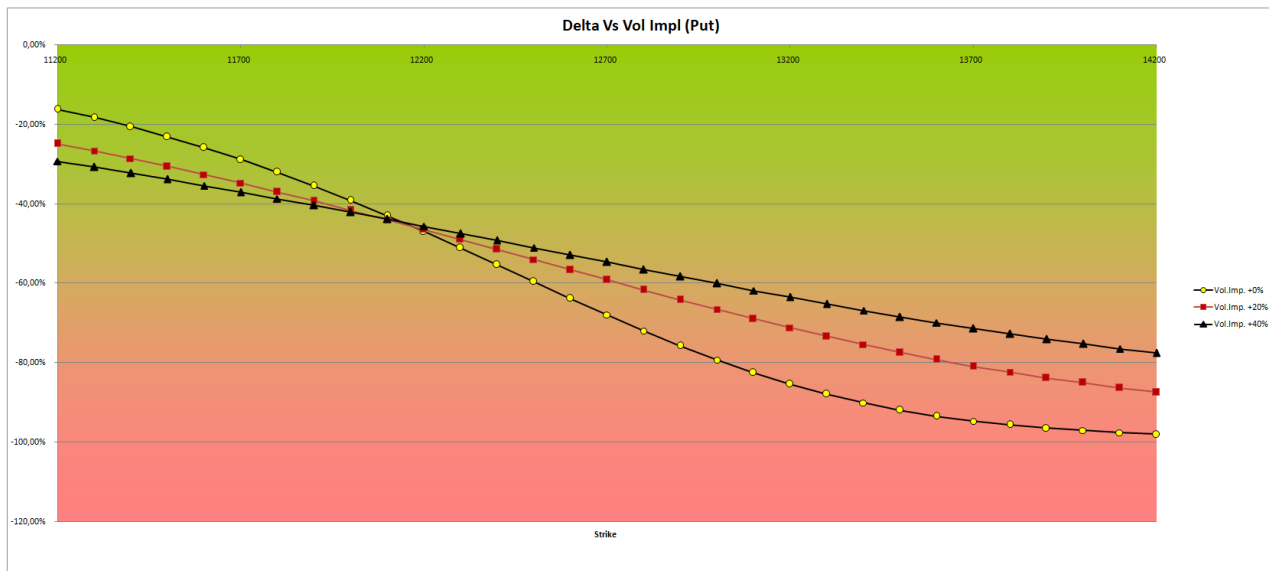


Figura 3

Dapprima alcune osservazioni per ambientarci, per così dire, sul fatto che ora stiamo osservando opzioni Put. Concentriamoci sulla curva a pallini gialli, che rappresenta il delta effettivo, calcolato sulla base della volatilità implicita prezzata al momento dal mercato. Innanzitutto, come mostra l'asse verticale, il delta assume valori negativi. Ed infatti è così: una Put ha sempre delta negativo, a differenza di una Call che lo ha sempre positivo. Il delta, inoltre, aumenta (in valore assoluto) via via che procediamo, lungo l'asse orizzontale, verso destra. In altri termini, all'aumentare dello strike le opzioni Put divengono sempre più ITM.

Ed ora uno sguardo al grafico nella sua interezza. Il punto di incrocio delle tre curve è sempre posizionato in corrispondenza dello strike prossimo all'ATM. E' quello lo strike, anche in questo caso, dove il delta mostra la minore sensibilità verso variazioni – sia crescenti che decrescenti - della volatilità implicita.

Prima dell'incrocio, ovvero procedendo da questo verso sinistra, le opzioni sono OTM e, come si può osservare, il delta aumenta (sempre in valore assoluto, naturalmente) all'aumentare della volatilità implicita. Anche in questo caso, la ragione è la medesima indicata a proposito del comportamento del delta per le opzioni Call.

Dopo l'incrocio, procedendo da questo verso destra, le opzioni sono ITM e il delta diminuisce all'aumentare della volatilità implicita. Il comportamento mostrato, in sostanza, è analogo a quello già illustrato per le opzioni Call ITM.

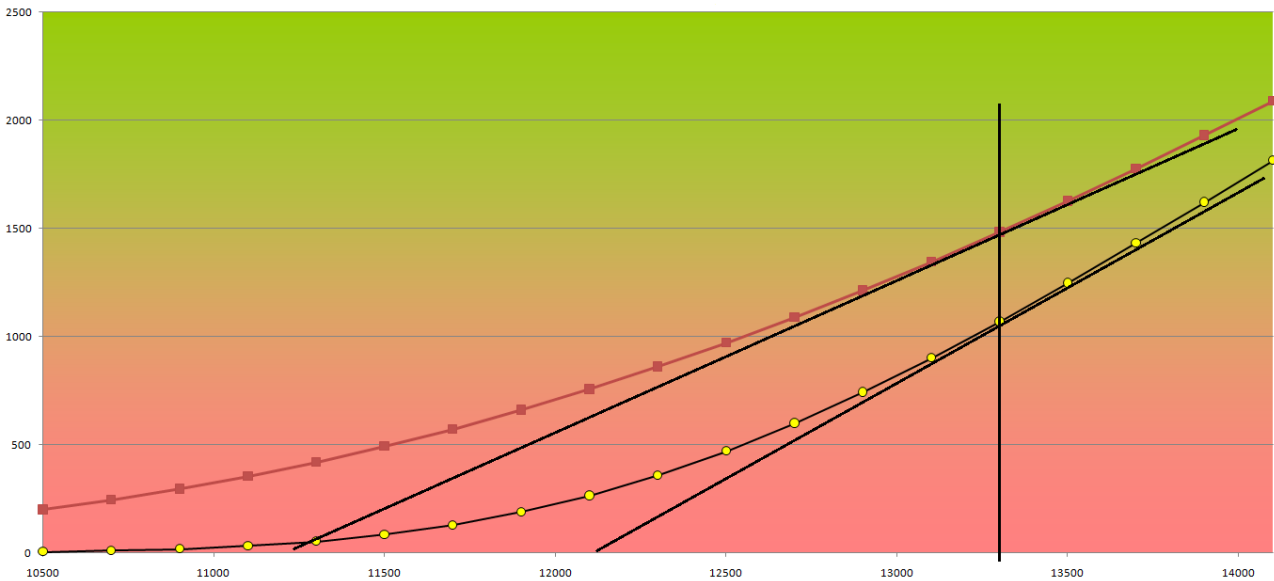


Figura 4

Ed ora proviamo ad osservare una curva alla quale dovremmo essere tutti abituati: l'at-now di un'opzione. In particolare ci riferiamo ad una Call 12.300/ott 2022, il grafico del cui at-now è quello mostrato dalla curva a pallini gialli riportata in figura 4, quando il sottostante vale circa 12.250. La curva rossa, invece, si riferisce alla stessa opzione dove abbiamo ipotizzato un aumento della volatilità implicita del 20%. Ed ora chiediamoci: che cosa accade se il sottostante cresce di circa 1000 punti? Ho riportato, sulla stessa figura, un segmento verticale in corrispondenza del valore assunto dal sottostante dopo tale variazione. Poi ho disegnato la retta tangente alla curva, in corrispondenza di tale valore del sottostante, ed ho calcolato la tangente trigonometrica dell'angolo formato da tale retta con l'asse delle ascisse. Sappiamo che tale calcolo ci conduce al delta che avrebbe tale opzione. Vi risparmio tutti i passaggi e vi dico che il risultato è circa uguale all'87%. Qualitativamente è qualcosa che dovevamo attenderci in quanto la nostra opzione è divenuta ITM. Ma che cosa accade se la volatilità implicita sale del 20%? A questo punto, ho fatto le stesse operazioni sulla curva rossa ed ho trovato un delta circa uguale al 67% (dalla figura, si osserva un angolo inferiore). Questo risultato ci conferma che all'aumentare della volatilità implicita il delta delle opzioni ITM tenderà a diminuire.

Per esercizio provate a fare lo stesso tipo di operazioni dopo aver ipotizzato, però, un decremento del sottostante di 1000 punti circa. A quel punto l'opzione sarà divenuta OTM e dovrete osservare un delta che aumenta, all'aumentare della volatilità implicita.

Il vanna

Ora, riflettiamo un momento. Sappiamo che il delta è la derivata del prezzo di un'opzione rispetto al sottostante. Qui, però, cosa abbiamo fatto? Abbiamo studiato come varia il delta rispetto al variare della volatilità implicita. E non è questa, forse, un'altra derivata? Vediamolo in simboli:

$$\text{vanna} = \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma}$$

dove con σ (leggi: "sigma"), indichiamo la volatilità implicita;

possiamo anche scrivere (visto che il delta è la derivata parziale prima rispetto al sottostante):

$$\text{vanna} = \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \sigma}$$

nel caso di una call, e:

$$\text{vanna} = \frac{\partial^2 p}{\partial S \partial \sigma}$$

nel caso di una put.

Ora, come abbiamo già spiegato in un precedente articolo, poiché le funzioni c e p (prezzo di una call e prezzo di una put), rispettano le ipotesi richieste dal teorema di Schwarz, allora:

$$\text{vanna} = \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \sigma} = \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma \partial S}$$

e, siccome:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \sigma} = \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma}$$

allora deve valere anche:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma \partial S} = \frac{\partial V}{\partial S}$$

essendo:

$$V = \frac{\partial c}{\partial \sigma}$$

che è la nota greca del primo ordine, vega, che misura la variabilità del prezzo di un'opzione al variare della volatilità implicita.

In definitiva questo ci porta ad affermare che noi possiamo arrivare a conoscere il vanna sia seguendo il procedimento già illustrato, ovvero facendo variare il delta al variare della volatilità implicita, sia osservando la variabilità del vega al variare del sottostante.

Del vanna, come dello charm e di altre greche del secondo ordine, avremo modo di approfondirne gli aspetti, soprattutto quelli operativi, in successivi articoli. Ma cosa possiamo dire, in questa prima fase? Seguitemi. Sappiamo che il prezzo di un'opzione varia al variare del sottostante e l'entità di questa variazione ce la racconta il delta. Sappiamo anche, però, che il prezzo di un'opzione varia anche al variare della volatilità implicita. E di tale variazione è responsabile il vega. Quando queste due variabili, sottostante e volatilità implicita, variano simultaneamente, l'entità combinata di tali variazioni, che si riflette sul prezzo dell'opzione, è regolata dal vanna.

Variazione del gamma rispetto alla V

Utilizziamo ora lo stesso procedimento, prima impiegato, per studiare l'andamento del gamma, al variare della volatilità implicita.

strike	Vol.Imp. +0%	gamma	Vol.Imp. +20%	gamma	Vol.Imp. +40%	gamma
11200	35,40%	0,00023	55,40%	0,00019	75,40%	0,00015
11300	34,76%	0,00026	54,76%	0,00020	74,76%	0,00015
11400	34,18%	0,00028	54,18%	0,00021	74,18%	0,00016
11500	33,53%	0,00030	53,53%	0,00022	73,53%	0,00016
11600	32,98%	0,00033	52,98%	0,00022	72,98%	0,00017
11700	32,34%	0,00035	52,34%	0,00023	72,34%	0,00017
11800	31,80%	0,00037	51,80%	0,00024	71,80%	0,00017
11900	31,15%	0,00039	51,15%	0,00025	71,15%	0,00018
12000	30,63%	0,00041	50,63%	0,00025	70,63%	0,00018
12100	30,05%	0,00043	50,05%	0,00026	70,05%	0,00018
12200	29,50%	0,00044	49,50%	0,00026	69,50%	0,00018
12300	29,00%	0,00044	49,00%	0,00026	69,00%	0,00019
12400	28,48%	0,00044	48,48%	0,00026	68,48%	0,00019
12500	27,97%	0,00043	47,97%	0,00026	67,97%	0,00019
12600	27,53%	0,00042	47,53%	0,00026	67,53%	0,00019
12700	27,11%	0,00039	47,11%	0,00026	67,11%	0,00019
12800	26,71%	0,00037	46,71%	0,00026	66,71%	0,00019
12900	26,40%	0,00034	46,40%	0,00025	66,40%	0,00019
13000	26,12%	0,00030	46,12%	0,00024	66,12%	0,00019
13100	25,88%	0,00027	45,88%	0,00024	65,88%	0,00018
13200	25,82%	0,00024	45,82%	0,00023	65,82%	0,00018
13300	25,75%	0,00020	45,75%	0,00022	65,75%	0,00018
13400	25,81%	0,00017	45,81%	0,00021	65,81%	0,00017
13500	25,90%	0,00015	45,90%	0,00020	65,90%	0,00017
13600	26,01%	0,00012	46,01%	0,00019	66,01%	0,00016
13700	26,37%	0,00011	46,37%	0,00018	66,37%	0,00016
13800	26,67%	0,00009	46,67%	0,00017	66,67%	0,00015
13900	27,02%	0,00008	47,02%	0,00016	67,02%	0,00015
14000	27,45%	0,00007	47,45%	0,00015	67,45%	0,00015
14100	27,84%	0,00006	47,84%	0,00014	67,84%	0,00014
14200	28,29%	0,00005	48,29%	0,00013	68,29%	0,00014

Figura 5

Siamo al 27/09/2022. Col sottostante a circa 12.200, andiamo ad osservare la chain che scade il 21 ottobre prossimo e, nella tabella di figura 5, evidenziamo il valore del gamma rispetto alla volatilità implicita prezzata. Poi, aggiungiamo ulteriori colonne nelle quali indicare una volatilità implicita aumentata del 20% e del 40%. E, a seguire, il relativo valore del gamma. In sostanza, per ogni cella delle volatilità incrementate, prendiamo il valore della volatilità implicita effettiva ed aggiungiamo il 20%, per una colonna, ed il 40% per l'altra. Al termine di queste operazioni otteniamo la tabella di figura 5.

Poi, riportiamo sul grafico di figura 6 l'andamento del gamma rispetto a ciascuna delle tre volatilità implicite.

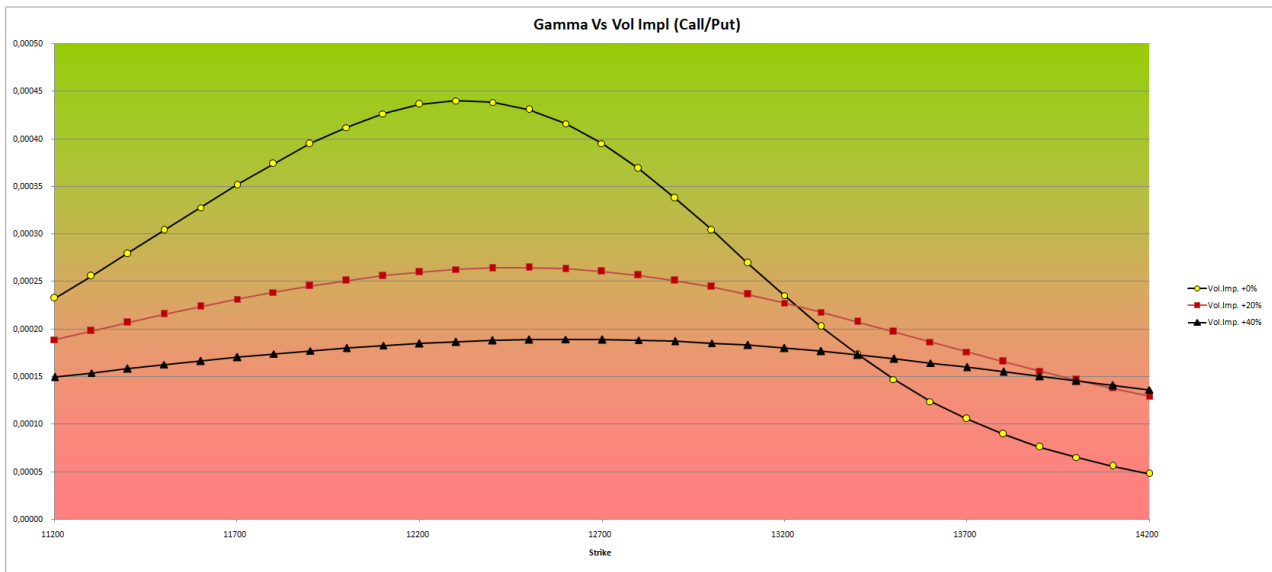


Figura 6

Che cosa notiamo? Che la curva a pallini gialli, quella relativa alla volatilità effettivamente prezzata dal mercato, è quella più alta fra le tre. Le altre due si riferiscono alle volatilità aumentate. Quindi, questo ci porta ad affermare che il gamma, all'aumentare della volatilità implicita, tende a diminuire. E più questa aumenta e più il gamma diminuisce. Ma qual è la ragione di tale fenomeno? Noi dobbiamo vedere il gamma come la greca responsabile della variazione repentina del prezzo di un'opzione. Se prendiamo un'opzione OTM, che possiede solo valore temporale, quanto più il sottostante crescerà e tanto più dovrà crescere il prezzo di tale opzione. Ciò, pertanto, dovrà essere accompagnato da un gamma elevato. Ma se la volatilità implicita aumenta, allora aumenta il prezzo dell'opzione e, pertanto, il gamma non dovrà più essere così elevato. E' come dire che la responsabilità di far aumentare il prezzo dell'opzione, al crescere del sottostante, è ripartita tra gamma e volatilità implicita.

Un altro modo per comprendere questo particolare fenomeno (matematicamente più rigoroso) è quello che fa riferimento all'espressione analitica del gamma. Chi volesse, può approfondirlo nel riquadro successivo.

Partendo dal modello matematico di Black & Scholes e procedendo per via analitica possiamo determinare l'espressione che consente di calcolare il gamma di un'opzione. Si trova:

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

Dove S_0 è il valore del sottostante, T è la durata di vita del contratto, σ è la volatilità implicita ed N' è la distribuzione di Gauss.

Come si può notare dalla formula, il valore del gamma e della volatilità implicita sono l'uno inversamente proporzionale all'altra. Pertanto quando la volatilità implicita aumenta, il gamma diminuisce. E viceversa.

Procediamo con le osservazioni (figura 6).

Notiamo che le differenze del valore del gamma tra i vari strike, all'aumentare della volatilità implicita, tendono ad essere meno marcate. In sostanza, le due curve, quella a quadratini rossi e quella a triangolini neri, sono molto più dolci. Questo significa che al variare del sottostante, quanto più cresce la volatilità implicita, tanto più il gamma tenderà a non variare molto nel passaggio da uno strike al successivo.

Inoltre, analogamente a quanto avevamo già scritto a proposito del gamma, anche per le due curve che si riferiscono alla volatilità implicita aumentata, il massimo di questa greca si ha in corrispondenza dell'ATM; mentre sia per le opzioni ITM che OTM il gamma tende a diminuire.

Anche qui c'è una greca, si chiama zomma, che rende conto della variabilità del gamma rispetto alla variabilità della volatilità implicita. E' una greca del terzo ordine (essendo il gamma già una greca del secondo ordine) e cercheremo di approfondirla più avanti.

Ancora una cosa: il grafico di figura 6 si riferisce, indistintamente, sia al caso delle opzioni call che delle opzioni put. Ciò in quanto la formula per il calcolo del gamma non dipende dal tipo di opzione: è la medesima sia per la call che per la put.

Greche di portafoglio

Ora che ne sappiamo un po' di più, su queste due greche, chiediamoci: ha senso calcolare il delta ed il gamma di un intero portafoglio? E cosa significa?

Bene! Tutti sappiamo, o a questo punto dovremmo sapere, che un'opzione ha un delta ed un gamma i cui valori dipendono, soprattutto, dal tempo, dalla volatilità implicita e dalla distanza strike-spot. Ma se nel nostro portafoglio sono presenti due o più opzioni? Si può dire che questo portafoglio, nella sua interezza, ha un certo delta ed un certo gamma? Sì, lo possiamo dire. E come procediamo con il calcolo? La buona notizia è che non è difficile. Sia il delta che il gamma di portafoglio si ottengono procedendo con la somma del delta e del gamma di tutte le opzioni presenti nello stesso. In generale, per il delta di portafoglio, scriveremo così:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n w_i \cdot \Delta_i$$

Non spaventiamoci! E' più semplice di quel che si potrebbe credere. Quella lettera (che sembra un tre ruotato di 180°) si chiama sigma ed è una lettera greca, in forma maiuscola. I matematici la usano per indicare in modo compatto una somma di termini. Si legge così: sommatoria per i che va da 1 ad n di $w_i \cdot \Delta_i$. E significa questo:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n w_i \cdot \Delta_i = w_1 \cdot \Delta_1 + w_2 \cdot \Delta_2 + \dots + w_n \cdot \Delta_n$$

E' una somma di n termini dove w_i indica il peso dell'i-esima opzione (cioè quante opzioni deteniamo in portafoglio di quel tipo) e Δ_i è il corrispondente delta della stessa opzione. Facciamo un esempio. Se abbiamo due opzioni che hanno delta 0,25 e 0,34, allora scriveremo:

$$\Delta = \sum_{i=1}^2 w_i \cdot \Delta_i = 1 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,34 = 0,59$$

Se, invece, abbiamo due opzioni con delta 0,15 ed una con delta -0,21 (una put in acquisto), scriveremo:

$$\Delta = \sum_{i=1}^2 w_i \cdot \Delta_i = 2 \cdot 0,15 - 1 \cdot 0,21 = 0,09$$

E per il gamma? Faremo la stessa identica operazione. Ovvero:

$$\Gamma = \sum_{i=1}^n w_i \cdot \Gamma_i = w_1 \cdot \Gamma_1 + w_2 \cdot \Gamma_2 + \dots + w_n \cdot \Gamma_n$$

Attenzione! Questi calcoli ci restituiscono i valori del gamma e del delta solo in modo puntuale. Non ci dicono cosa succederà se il sottostante aumenta o diminuisce, se aumenta o diminuisce la volatilità implicita e cosa accade tra una settimana. Alcune piattaforme evolute, ci offrono anche questa possibilità. E noi? Noi cercheremo di capire come tirar giù queste curve grazie al nostro fidato compagno di calcolo. Ma lo vedremo la prossima volta. Anche perché al fuoco, di carne, ne abbiamo già messa un bel po'.

Conclusioni

Siamo giunti al termine del quarto articolo relativo a queste due greche. Con il prossimo articolo dovrei esaurire tutto ciò che, di importante, riguarda queste due greche.

Comunque, qualche ulteriore strumento da inserire nella valigetta del trader opzionista, con queste pagine, lo abbiamo visto. Andiamo avanti.

Buon lavoro!