La volatilità (parte seconda)

Premessa

Oggi cercheremo di comprendere il corretto procedimento per il calcolo della volatilità storica. Prima, però, occorrerà capire che cosa si intende per regime di capitalizzazione continua.

Il regime di capitalizzazione continua

Nella valutazione delle opzioni e dei future (ma anche di altri derivati) si usano tassi di interesse composti continuamente. Cerchiamo di capire, partendo da un esempio, che cosa significa comporre un tasso in modo continuo. Supponiamo di aver deciso di investire la somma di 1000 euro al tasso del 6% annuale, per il periodo di un anno. La domanda è: al termine di tale periodo, qual è la somma che ci verrà restituita? La risposta dipende dal modo in cui questo interesse viene corrisposto.

Se l'interesse viene corrisposto al termine dell'anno allora questo ammonterà a 60 euro ed il tasso effettivo coinciderà con quello nominale, il 6%.

Se l'interesse viene corrisposto ogni 6 mesi, 3% ogni volta, al termine dell'anno allora avremo complessivamente percepito la somma di 60,9 euro. In questo caso il tasso effettivo sarà del 6,09%: maggiore di quello nominale del 6%! Ma perché? Perché dopo i primi sei mesi percepiremo 30 euro che potremo reinvestire allo stesso tasso: il 6% di 30 euro ci restituisce 1,8 euro; ma essendo trascorsi solo 6 mesi, ne percepiremo la metà, ovvero 0,9 euro. Quindi, complessivamente, avremo:

- 30 euro: interesse del 6% sul capitale di 1000 euro per i primi sei mesi;
- 30 euro: interesse del 6% sul capitale di 1000 euro per i successivi sei mesi;
- 0,9 euro: interesse del 6% sulla somma di 30 euro maturato nel secondo semestre.

Quindi: 30+30+0,9=60,9 euro che, rispetto ad un capitale di 1000 euro, rappresenta un interesse del 6,09%.

In formule, se indichiamo con:

C_0 – il capitale al tempo 0, ovvero il capitale iniziale

C_n – il capitale al periodo n

i – il tasso di interesse in decimale (significa che il 3% equivale a 0,03)

n – il periodo in anni

Se l'interesse corrisposto è annuale avremo:

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

In pratica, se la somma iniziale è 1000 euro, dopo un anno, al tasso del 6%, il calcolo da fare sarà:

$$C_1 = 1000 \cdot (1+0{,}06)^1 = 1060$$

dopo due anni:

$$C_2 = 1000 \cdot (1+0{,}06)^2 = 1123{,}6$$

e così via per tre, quattro, ..., n anni.

Ora, supponiamo che il regime di capitalizzazione non sia più annuale, ma semestrale. Voglio dire, in sostanza, che colui al quale abbiamo prestato i nostri soldi ci restituirà due rate semestrali ognuna calcolata con un tasso pari alla metà di quello annuo: nell'esempio il 3%. E allora, dopo i primi sei mesi, ci restituirà 30 euro. Questi 30 euro verranno automaticamente reinvestiti e, al termine del secondo semestre, percepiremo:

$$C = 1030 \cdot (1 + 0{,}03) = 1060{,}9$$

Come già anticipato, se l'interesse viene corrisposto semestralmente, il tasso effettivo sarà del 6.09%. Che, evidentemente, è maggiore di quello nominale del 6%.

Riprendiamo un attimo la formula appena scritta e osserviamo che possiamo anche riscriverla nel seguente modo:

$$C = 1000 \cdot (1 + 0{,}03) \cdot (1 + 0{,}03) = 1000 \cdot (1 + 0{,}03)^2 = 1060{,}9$$

(questo perché $1030 = 1000 \cdot (1 + 0{,}03)$).

Ed ora, invece, supponiamo che il regime di capitalizzazione sia trimestrale. Il debitore, in questo caso, ci restituirà quattro rate trimestrali ognuna calcolata con un tasso pari ad un quarto di quello annuo: nell'esempio l'1,5%. Dopo i primi tre mesi, ci restituirà 15 euro. Questi 15 euro verranno automaticamente reinvestiti e, al termine del secondo trimestre, percepiremo:

$$C = 1015 \cdot (1 + 0{,}015) = 1030{,}225$$

che possiamo anche riscrivere nel seguente modo:

$$C = 1000 \cdot (1 + 0{,}015) \cdot (1 + 0{,}015) = 1000 \cdot (1 + 0{,}015)^2 = 1030{,}225$$

Estendendo queste considerazioni possiamo pervenire alla somma che percepiremo al termine di un anno:

$$C = 1000 \cdot (1 + 0{,}015) \cdot (1 + 0{,}015) \cdot (1 + 0{,}015) \cdot (1 + 0{,}015) = 1061{,}36$$

che, più sinteticamente, possiamo anche riscrivere nel seguente modo:

$$C = 1000 \cdot (1 + 0{,}015)^4 = 1061{,}36$$

Ora, osserviamo: 0,015 è il rapporto tra 0,06 e 4. Cioè, il nostro tasso annuale diviso per il numero di periodi nell'anno (ovvero, 4 trimestri). E l'esponente è pari al numero dei periodi infrannuali.

Ma allora, se indichiamo con ***m*** il numero di periodi infrannuali in cui viene calcolato l'interesse, al termine di un anno il nostro capitale sarà divenuto pari a:

$$C = 1000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}06}{m}\right)^m$$

Naturalmente la domanda alla quale risponde questa formula è inerente ad una durata del debito pari ad un anno.

E cosa succede se, invece, gli anni sono più di uno? Eccola qui:

$$C_{n,m} = C_0 (1 + \frac{i}{m})^{n \cdot m}$$

dove con $C_{n,m}$ si è indicato il valore del capitale, al termine di un periodo di n anni, prestato ad un tasso di interesse nominale i e soggetto ad un regime che capitalizza gli interessi m volte l'anno.

Prima di arrivare alla definizione di capitalizzazione continua impieghiamo la formula appena indicata per un altro esempio: la capitalizzazione giornaliera. Ovvero, supponiamo che il nostro capitale, che presteremo per un anno al tasso nominale del 6%, ci venga remunerato al termine di ogni giorno. Eseguiamo il calcolo ed otteniamo:

$$C_{1,365} = 1000 \cdot (1 + \frac{0,06}{365})^{1 \cdot 365} = 1061,831311$$

Ed ora proviamo ad aumentare ulteriormente la frequenza di capitalizzazione. Che cosa accade se il nostro debitore ci remunera ogni ora? Oppure ogni minuto? O anche, ogni secondo? Insomma, se facciamo crescere la frequenza di capitalizzazione (matematicamente si dice che facciamo tendere m ad infinito) che cosa si ottiene? Dobbiamo risolvere quell'operazione che in analisi infinitesimale si chiama limite. Ovvero:

$$C_{n,\infty} = \lim_{m \to \infty} C_0 (1 + \frac{i}{m})^{n \cdot m}$$

il risultato di questo limite, che qui non dimostriamo, è:

$$C_{n,\infty} = \lim_{m \to \infty} C_0 (1 + \frac{i}{m})^{n \cdot m} = C_0 e^{in}$$

dove e^x, talvolta indicata con exp(x) è la funzione esponenziale ed e è una costante denominata numero di Nepero[1]. E' una funzione disponibile in tutte le calcolatrici scientifiche e, naturalmente, anche in excel.

Ecco, questa è la ***capitalizzazione continua***.

Vediamo subito di metterla in pratica. Partiamo sempre dall'esempio già mostrato. Immaginiamo di capitalizzare in modo continuo, al tasso del 6%, la somma di 1000 euro. Dopo un anno avremo:

$$1000 \cdot e^{0,06} = 1061,836547$$

che, come si può vedere, produce un risultato molto vicino alla capitalizzazione giornaliera (si può affermare che capitalizzazione continua e capitalizzazione giornaliera coincidono entro i primi due decimali).

Il problema dell'attualizzazione

Prima di passare oltre, vorrei usare il risultato ottenuto per la soluzione di un altro problema: quello dell'attualizzazione in regime di capitalizzazione continua. Attualizzare un capitale futuro significa "riportarlo" ad oggi, renderlo disponibile alla data presente. In sostanza, se fra 6 mesi percepiremo la somma di 1000 euro, avendo investito al 5%, qual'é il capitale che dovremmo impiegare inizialmente? Il capitale, cioè, che dobbiamo investire oggi, al 5%, per aver 1000 euro fra sei mesi?

Abbiamo visto che in regime di capitalizzazione continua vale la relazione:

$$C_n = C_0 e^{in}$$

E' evidente che C_0, in questa equazione, rappresenta la nostra incognita. Allora possiamo scrivere:

[1] Si tratta di un numero irrazionale, le cui prime 5 cifre decimali valgono 2,71828, che rappresenta la base della funzione esponenziale e del logaritmo naturale. Eulero è stato il primo ad indicare questa costante con la lettera e. Mentre Napier (1618) lo introduce per la prima volta in un appendice di un lavoro sui logaritmi.

$$C_0 = \frac{C_n}{e^{in}} = C_n e^{-in}$$

(dove si è usata la proprietà delle potenze secondo la quale, una potenza che passa dal numeratore al denominatore, o viceversa, inverte il segno del suo esponente)

Ed ora, con questa formula, risolviamo l'esempio numerico del problema precedente:

$$C_0 = C_n e^{-in} = 1000 \cdot e^{-0,05 \cdot \frac{1}{2}} = 975{,}31$$

dove 0,05 è il tasso e 1/2 è il periodo di tempo in unità d'anno. Quindi, in conclusione, ci occorreranno circa 975 euro per ottenerne 1000, tra sei mesi, al tasso del 5%.

Il problema del tasso di interesse

Proviamo ora a porci questa domanda: quale sarà l'interesse, sempre in regime di capitalizzazione continua, che consente ad un capitale iniziale, dopo un certo periodo di tempo, di divenire un determinato capitale a scadenza? In questo caso dobbiamo affrontare quel problema che i matematici indicano come problema esponenziale. Ovvero un problema in cui l'incognita compare all'esponente:

$$a^x = b$$

che possiamo leggere in questo modo: quale valore dobbiamo dare ad ***x*** affinché, elevando ***a*** a tale valore, si ottenga ***b***?

Per esempio, nel caso:

$$3^x = 9$$

è evidente che si debba avere: x=2.

Ma se avessimo:

$$3^x = 8$$

Non potremmo calcolare x, mentalmente, come abbiamo fatto nell'esempio precedente. Potremmo solo dire che ci aspettiamo che x sia compreso tra 1 e 2, magari più vicino a 2, ma nulla di più. E allora? Il problema esponenziale si risolve ricorrendo alla funzione logaritmo. In pratica:

$$x = log_a b$$

che si legge: logaritmo in base ***a*** di ***b***.

Ed ora veniamo al nostro problema. Nell'equazione:

$$C_n = C_0 e^{in}$$

l'incognita è il tasso i. Pertanto, isoliamo dapprima il fattore esponenziale:

$$e^{in} = \frac{C_n}{C_0}$$

quindi, passando ai logaritmi:

$$in = \ln \frac{C_n}{C_0}$$

(dove il logaritmo in base ***e*,** usualmente, si scrive ***ln***, in luogo di ***log_e***)

infine:

$$i = \frac{1}{n} \ln \frac{C_n}{C_0}$$

Rendimento percentuale e rendimento logaritmico

Ed ora, vi chiedo un ultimo sforzo per far nostri gli strumenti necessari per il calcolo corretto della volatilità storica.

Chi non se la sentisse, può saltare direttamente alla tesi conclusiva.

Sappiamo che il ***rendimento percentuale*** di un'attività finanziaria, al tempo T, vale:

$$R = \frac{C_T - C_0}{C_0}$$

Definiamo, ***rendimento logaritmico***, la quantità:

$$R_l = ln \frac{C_T}{C_0}$$

Vogliamo ora mostrare che, per T piccolo, R ed R_l sono circa uguali.

Dalla definizione di rendimento logaritmico possiamo scrivere:

$$e^{R_l} = \frac{C_T}{C_0} \to C_T = C_0 e^{R_l}$$

ed ora lo andiamo a sostituire nel rendimento percentuale:

$$R = \frac{C_T - C_0}{C_0} \to R = \frac{C_0 e^{R_l} - C_0}{C_0} \to R = \frac{C_0(e^{R_l} - 1)}{C_0} \to R = e^{R_l} - 1$$

Ora sviluppando in serie di Taylor l'esponenziale, possiamo sostituire a questa funzione trascendente la polinomiale che l'approssima. Troviamo:

$$e^{R_l} = 1 + R_l + \frac{R_l^2}{2} + \frac{R_l^3}{3} + \frac{R_l^4}{4} + \cdots$$

Per T piccolo possiamo approssimare tale polinomiale ad una funzione del primo ordine (ovvero una retta). In sostanza possiamo troncare lo sviluppo tagliando tutti i termini maggiori o uguali al secondo grado.

In pratica:

$$e^{R_l} \approx 1 + R_l \to R_l = e^{R_l} - 1$$

Infine, sapendo che:

$$R = e^{R_l} - 1$$

possiamo concludere che:

$$R \approx R_l$$

Che era la tesi che volevamo dimostrare: ***il rendimento logaritmico è un'approssimazione lineare del rendimento percentuale, quando T è piccolo***.

Procedura corretta per il calcolo della volatilità storica di un asset finanziario

Modifica del calcolo del rendimento giornaliero

Riprendiamo l'articolo della puntata precedente e procediamo con le modifiche promesse.

Innanzitutto, il calcolo del rendimento percentuale giornaliero:

$$u_i = \frac{\text{Close}_i - \text{Close}_{i-1}}{\text{Close}_{i-1}} = \frac{14.539{,}56 - 14.427{,}59}{14.427{,}59} = 0{,}007768 = 0{,}7768\% \cong 0{,}78\%$$

va sostituito con il rendimento logaritmico giornaliero:

$$u_i = \ln\frac{\text{Close}_i}{\text{Close}_{i-1}} = \ln\frac{14.539{,}56}{14.427{,}59} = 0{,}007731 = 0{,}7731\% \cong 0{,}77\%$$

Riportiamo il tutto su excel e, osservate le ultime due colonne, dove raffrontiamo le due modalità di calcolo (rendimento percentuale, la prima; e rendimento logaritmico, la seconda): sono quasi sempre coincidenti fino alla seconda cifra decimale. Che poi, trattandosi di numeri espressi in percentuale, sarebbe addirittura la quarta cifra decimale! E' una ulteriore dimostrazione, diciamo pratica, della equivalenza delle due modalità di calcolo del rendimento quando T è piccolo. Nel nostro caso T è un giorno.

24/11/2022	14456,15	14570,71	14447,55	14539,56	0,78%	0,77%
25/11/2022	14547,58	14571,66	14498,05	14541,38	0,01%	0,01%
28/11/2022	14471,1	14514,73	14374,15	14383,36	-1,09%	-1,09%
29/11/2022	14404,67	14429,87	14327,04	14355,45	-0,19%	-0,19%
30/11/2022	14429,22	14487,7	14363,32	14397,04	0,29%	0,29%
01/12/2022	14543,8	14563,7	14423,79	14490,3	0,65%	0,65%
02/12/2022	14465,7	14584,59	14372,42	14529,39	0,27%	0,27%
05/12/2022	14487,43	14507,16	14394,37	14447,61	-0,56%	-0,56%
06/12/2022	14406,87	14471,5	14305,26	14343,19	-0,72%	-0,73%
07/12/2022	14304,95	14372,35	14218,18	14261,19	-0,57%	-0,57%
08/12/2022	14277,75	14298,81	14196,77	14264,56	0,02%	0,02%
09/12/2022	14325,8	14385,57	14217,96	14370,72	0,74%	0,74%
12/12/2022	14300,43	14366,39	14262,6	14306,63	-0,45%	-0,45%
13/12/2022	14345,88	14675,84	14302,49	14497,89	1,34%	1,33%
14/12/2022	14453,54	14470,74	14375,95	14460,2	-0,26%	-0,26%
15/12/2022	14351,31	14363,12	13982,59	13986,23	-3,28%	-3,33%
16/12/2022	13978,44	14011,26	13815,24	13893,07	-0,67%	-0,67%
19/12/2022	13934,75	14001,37	13929,32	13958,23	0,47%	0,47%

La deviazione standard campionaria

E' giusto che vi dica anche un'altra cosa: quando, come nel nostro caso, disponiamo solo dei dati di un campione, per il calcolo della deviazione standard dobbiamo utilizzare una formula diversa, la formula della deviazione standard campionaria. Eccola:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} s_i^2}$$

Gli statistici, infatti, hanno dimostrato che quando si ha a che fare con un campione (e non con l'intera popolazione), questa formula è più accurata e gode di alcune proprietà particolarmente utili ed è quindi preferibile a quella classica.

Naturalmente, anche questa funzione è disponibile su excel.

Conclusioni

Ora siamo in grado di applicare la procedura standard per il calcolo della volatilità storica di un asset finanziario. Nelle prossime puntate cominceremo, invece, a capire qualcosa di più della volatilità che maggiormente interessa un'opzionista: la volatilità implicita. E, ne vedremo delle belle!

Buon studio!