La lettera greca rho

Premessa

Interrompo, temporaneamente, la serie di articoli sulla volatilità per due ragioni: mi sono giunte richieste di delucidazioni circa il significato operativo di questa greca e, seconda ragione, siamo ormai (ri)entrati in un'epoca di tassi non più a zero (o negativi) ma crescenti: ciò rende di nuovo attuale l'attenzione al tasso privo di rischio e a come questo può influenzare il prezzo delle opzioni.

Il tasso privo di rischio

Quando valutiamo un'opzione con la formula di Black and Scholes (B&S), tra i parametri che dobbiamo inserire nel modello vi è anche il *tasso privo di rischio*. Ma che cosa intendiamo con tale locuzione? Si tratta del tasso di interesse associato ad un'attività finanziaria che viene considerata sicura il cui rendimento, pertanto, è certo. Le obbligazioni di emittenti ritenuti quasi certamente solvibili – una certezza al 99,9% - sono sicuramente un buon punto di riferimento. Nelle classifiche delle agenzie di rating queste attività sono indicate con la sigla AAA. Per fare un esempio, rimanendo in Europa, citiamo i Bund, obbligazioni emesse dalla Repubblica Federale Tedesca. Nel sistema finanziario italiano, invece, una tale attività è considerata essere il Buono Ordinario del Tesoro (BOT), meno sicuro, però, rispetto al Bund. Negli Stati Uniti, invece, si usa il T-Bill.

Ma perché, tali attività finanziarie, sono considerate prive di rischio? Ora, sono convinto, che tutti noi sappiamo che non esistono attività finanziarie che siano prive di rischio. E allora?

La ragione è che noi consideriamo i titoli di Stato a breve termine come attività finanziarie prive di rischio in quanto, i relativi governi, hanno il potere di stampare moneta (per la verità l'Italia, e tutti i paesi dell'area Euro, con l'adesione a tale moneta, tale potere lo hanno perso; potere che è da questi paesi delegato alla BCE).

E' allora estremamente improbabile che un governo non adempia alle sue obbligazioni. Pertanto, il rischio di fallimento, soprattutto se ci riferiamo ad obbligazioni a breve termine, è praticamente nullo.

E in Europa? C'è l'EURIBOR

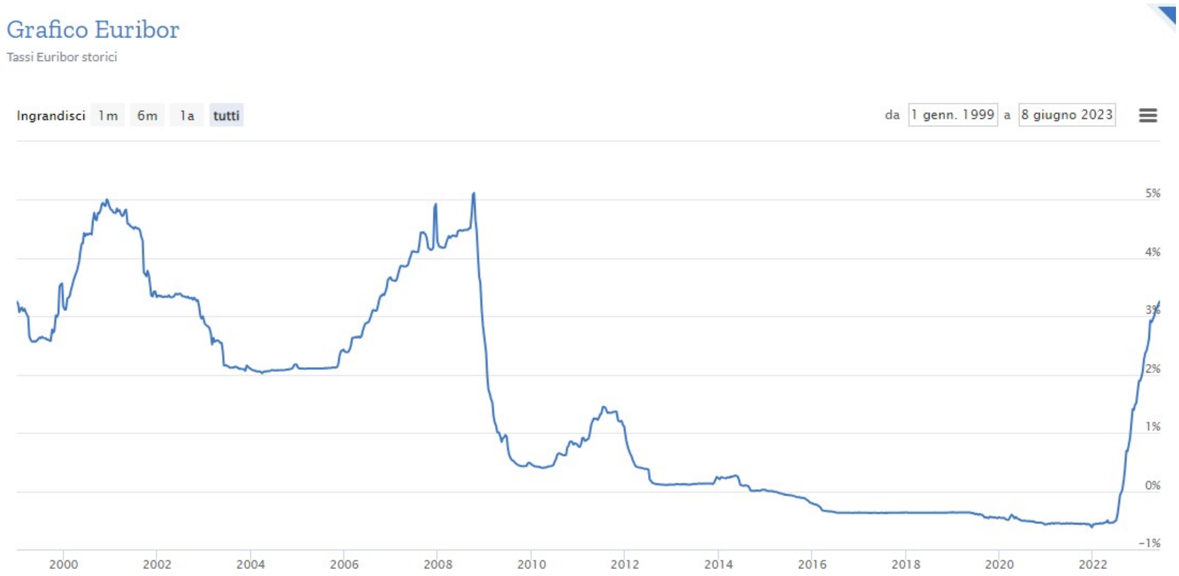
L'EURIBOR è il tasso di interesse, applicato ai prestiti interbancari in euro non garantiti, che una serie di banche europee – con elevato merito di credito - utilizza per calcolare il rimborso dei prestiti che vengono concessi tra gli stessi istituti di credito per un periodo di tempo che può variare da una settimana a 12 mesi.

E' calcolato giornalmente dalla European Banking Federation. Questo è il sito dove trovare le informazioni che ci interessano: https://www.euribor.it/euribor-oggi/

e queste, ad esempio, sono le rilevazioni periodiche (giornaliere) dei tassi ad 1, 3, 6 e 12 mesi.

EURIBOR	1 MESE	3 MESI	6 MESI	12 MESI
08/06	3.26	3.49	3.76	3.94
07/06	3.27	3.46	3.73	3.92
06/06	3.25	3.48	3.72	3.91
05/06	3.22	3.49	3.74	3.88
02/06	3.22	3.49	3.73	3.88
01/06	3.21	3.46	3.72	3.88
31/05	3.21	3.46	3.75	3.94
30/05	3.21	3.47	3.77	3.97
29/05	3.21	3.48	3.78	3.98
26/05	3.20	3.46	3.76	3.96
25/05	3.20	3.46	3.77	3.94
24/05	3.14	3.42	3.74	3.93
23/05	3.14	3.42	3.73	3.91
22/05	3.14	3.41	3.74	3.89
19/05	3.13	3.42	3.71	3.88
18/05	3.15	3.38	3.69	3.86
17/05	3.15	3.39	3.67	3.83
16/05	3.16	3.38	3.66	3.81
15/05	3.15	3.36	3.66	3.81

La figura successiva mostra il grafico dell'Euribor ad un mese che, come si può osservare, negli ultimi vent'anni non è andato oltre il 5%. Nell'ultimo decennio, inoltre, si è mosso attorno allo 0% toccando anche quotazioni negative.



Quale tasso impiegare per la valutazione del prezzo di un'opzione?

Dipende dal tempo di vita residuo del contratto di opzione che intendiamo negoziare. Per opzioni che scadono tra un mese, useremo il tasso Euribor ad un mese. Per opzioni che scadono fra tre mesi, useremo il tasso Euribor a tre mesi. E così via.

Per opzioni che hanno una scadenza diversa, ad esempio quaranta giorni, ci dovremo arrangiare. Magari usando qualche tecnica di interpolazione (lineare per maggior semplicità; oppure, se intendiamo essere più precisi, di ordine superiore al primo). Naturalmente non intendo affrontare tali tecniche, in questo articolo. Saranno oggetto di articoli successivi, se ve ne sarà l'interesse.

Definizione di rho

Questa lettera greca, come molti già sapranno, misura la sensibilità del prezzo di un'opzione al variare del tasso di interesse. In formula, indicando con ***V***[1] il prezzo di un'opzione (call o put che sia):

$$rho = \rho = \frac{\partial V}{\partial r}$$

In sostanza il valore di questa greca[2] ci dice di quanto cambierà il valore dell'opzione per ogni punto percentuale di variazione di r. L'unità di misura è euro/punto percentuale (oppure dollaro/punto percentuale; o altra unità monetaria).

Come ora si dimostrerà, empiricamente, questa greca è positiva per le call e negativa per le put. In sostanza, per una call, avremo:

$$rho = \frac{\partial c}{\partial r} > 0$$

mentre, per una put:

$$rho = \frac{\partial p}{\partial r} < 0$$

Proviamo a fare qualche simulazione con un calcolatore. Oggi è il 9 giugno 2023 e, con lo spot del Dax a 16.000, consideriamo una call ed una put atm, con volatilità implicita del 20% e scadenza settembre 2023. Essendo a circa tre mesi dalla data di scadenza, immettiamo, quale tasso privo di rischio, r=3,49%. La figura successiva mostra quello che si ottiene.

Sottostante	16000
Strike	16000
Data odierna	9/6/23 23.45
Data scadenza	15/9/23 13.00
Volatilità implicita	20,0%
Tasso privo di rischio	3,49%
Dividendo	0,00%

	Call Option	Put Option
Prezzo	**733,6**	**585,0**
Delta	0,556	-0,444
Gamma	0,024	0,024
Theta	-4,130	-2,614
Vega	32,668	32,668
Rho	21,833	-20,532

Il valore della greca in esame è pari a 21,8, per la call ed a -20,5, per la put. Osservando i prezzi, inoltre, nonostante si tratti di due opzioni con pari moneyness, dobbiamo constatare che fra di esse c'è una notevole differenza: la call vale circa il 25% in più di ciò che vale la put! Come mai? Lo capiremo tra poco.

Ora, se abbiamo ben compreso il significato di questa greca, dobbiamo affermare che se il tasso privo di rischio sale di un punto percentuale, la call si dovrà apprezzare di circa 21,8 punti, mentre, per la put, dovremo assistere ad un decremento del suo valore di circa 20,5 punti. Verifichiamo se è così.

[1] V: *Value of the option*

[2] In letteratura questa lettera greca è indicata con la parola rho, oppure con la corrispondente lettera greca (ρ)

Sottostante	16000	
Strike	16000	
Data odierna	9/6/23 23.50	
Data scadenza	15/9/23 13.00	
Volatilità implicita	20,0%	
Tasso privo di rischio	4,49%	
Dividendo	0,00%	
	Call Option	**Put Option**
Prezzo	**755,6**	**564,7**
Delta	0,567	-0,433
Gamma	0,024	0,024
Theta	-4,358	-2,413
Vega	32,537	32,537
Rho	22,210	-20,041

Ed infatti dai calcoli dimostrano che è così (a parte qualche decimale poco significativo).

Ed ora, proviamo a vedere che cosa accade se immettiamo un tasso privo di rischio nullo.

Sottostante	16000	
Strike	16000	
Data odierna	9/6/23 23.53	
Data scadenza	15/9/23 13.00	
Volatilità implicita	20,0%	
Tasso privo di rischio	0,00%	
Dividendo	0,00%	
	Call Option	**Put Option**
Prezzo	**659,7**	**659,7**
Delta	0,521	-0,479
Gamma	0,024	0,024
Theta	-3,378	-3,378
Vega	32,954	32,954
Rho	20,499	-22,262

Com'era lecito attendersi, i prezzi delle due opzioni sono perfettamente eguali.

Quindi, empiricamente, stiamo cominciando ad osservare alcune particolarità circa l'azione del tasso di interesse privo di rischio sui prezzi delle due opzioni: all'aumentare di questo, aumenta il prezzo della call e diminuisce quello della put.

D'altronde, si può dimostrare, eseguendo il calcolo della derivata parziale indicata nella definizione, che il rho di una call è strettamente crescente con il tasso di interesse r. Ciò significa che al crescere di r cresce anche il prezzo dell'opzione.

Altresì, si può dimostrare che il rho di una put, invece, è strettamente decrescente con il tasso di interesse r. E questo vuol dire che, al crescere di r, il prezzo dell'opzione decresce.

Se, nel modello B&S, si esegue la derivata parziale del prezzo di una call al variare del tasso r, si trova:

$$rho(call) = \frac{\partial c}{\partial r} = K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot (T-t) \cdot \Phi(d_2) > 0$$

Dalla formula non è immediato comprendere la ragione per cui il rho di una call sia positivo. Ciò in quanto ci sono due effetti che operano in contrapposizione: (1) diminuisce il fattore di attualizzazione e, ciò, muove il risultato finale verso il basso; (2) aumenta il drift del processo S, che spinge il risultato finale verso l'alto. Ed è proprio questo secondo effetto a prevalere.

mentre, per una put:

$$rho(put) = \frac{\partial p}{\partial r} = -K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot (T-t) \cdot \Phi(-d_2) < 0$$

Qui i due effetti, fattore di attualizzazione e drift, operano entrambi nella stessa direzione, verso il basso. Ciò ci restituisce un rho che, per le put, è strettamente decrescente con il tasso r.

Ma perché accade ciò? Quando noi compriamo una call, stiamo comprando il diritto di poter acquistare una determinata attività finanziaria, ad un certo prezzo ed entro una certa scadenza. Tutti sappiamo, però, che per l'acquisto di tale diritto non dobbiamo procedere all'intero esborso per l'acquisto di tutta l'attività finanziaria. Tornando alla prima figura, ad esempio, l'acquisto della call 16.000 a 733,6 ci conferisce il diritto di poter acquistare, se vorremo, l'intero sottostante entro la data di scadenza del 15/09/2023. Ma il nostro esborso, in termini percentuali, è solo del 4,6% circa! Potremmo mettere in un conto di deposito, per circa tre mesi, il restante 95,4% del capitale e godere dei frutti di tale deposito. Ecco, allora, che per evitare un tale arbitraggio, questo interesse viene inglobato, dal modello B&S, nel prezzo dell'opzione.

Per la put occorre rovesciare il ragionamento. Attenzione! Chi vende una put (e non chi la compra) sa che, se sarà esercitato, sarà costretto ad acquistare l'attività finanziaria, oggetto del contratto, al prezzo strike. Ma l'esborso che ne seguirà, avverrà solo alla data di scadenza del contratto. Quindi, quel denaro che il venditore di put, comunque deve possedere, potrebbe ancora una volta essere versato in un conto di deposito dal quale ricevere il relativo interesse. Per tale ragione quella put, maggiore è il tasso privo di rischio, e meno dovrà costare.

Naturalmente questi ragionamenti valgono solo quando il sottostante è un'azione o un indice (anche se regolato per contanti). Non valgono se, ad esempio, il sottostante è un future, dal momento che, all'atto dell'esercizio, non si riceve tutto il sottostante ma solo un contratto future.

Inoltre, giocherellando ancora con il calcolatore, proviamo a vedere che cosa succede a due opzioni, sempre atm, con scadenza, però, più ravvicinata. Diciamo un mese circa. Consideriamo, quindi, la scadenza luglio.

Sottostante	16000
Strike	16000
Data odierna	10/6/23 0.02
Data scadenza	21/7/23 13.00
Volatilità implicita	20,0%
Tasso privo di rischio	3,26%
Dividendo	0,00%

	Call Option	Put Option
Prezzo	**460,1**	**400,8**
Delta	0,535	-0,465
Gamma	0,037	0,037
Theta	-5,887	-4,464
Vega	21,449	21,449
Rho	9,225	-8,917

Notiamo sempre una differenza di valore, a favore della call. Questa volta, però, meno marcata: la call vale poco meno del 15% in più di ciò che vale la put!

E da questa ulteriore osservazione possiamo desumere che maggiore è il tempo di vita dei contratti che andremo a negoziare e maggiore sarà la distanza tra i prezzi delle due opzioni; a parità di strike, naturalmente.

Anche questo fenomeno si spiega allo stesso modo: maggiore è il tempo di vita di un contratto e maggiore sarà l'interesse che andremmo a percepire, versando il capitale necessario per l'acquisto del sottostante (decurtato del premio) in un conto deposito.

La variabilità di rho

Ed ora cerchiamo di studiare in modo più analitico la variabilità di questa greca al variare del sottostante, del tempo e della volatilità implicita.

Per far ciò ricorreremo, ancora una volta, alla metodologia già vista in passato: quella delle curve parametriche. E' una metodologia di analisi che reputo, da un punto di vista visivo, più efficace di quella basata sui grafici tridimensionali.

Rho al variare del sottostante e del tempo

Scadenza breve

Cominciamo col vedere come varia rho al variare del sottostante. Consideriamo il valore dello spot del Dax, circa 16.070, ad oggi 12 giugno 2023, come valore centrale del nostro asse delle ascisse. Facciamo variare il sottostante da 15.000 a 17.000, circa un 6% sopra e sotto lo spot. Calcoliamo il valore di rho, per ciascuno di tali strike, uno per la call e l'altro per la put, sulla base dei prezzi realmente esposti dal market maker. Tale lavoro, poi, lo replichiamo per tre scadenze diverse: circa un mese (luglio 2023), circa tre mesi (settembre 2023) e circa sei mesi (dicembre 2023). Ed ecco quel che si ottiene per la prima di queste scadenze (con r impostato al valore attuale dell'Euribor ad un mese, 3,26%).

La curva a pallini gialli rappresenta il rho delle call mentre, quella a quadratini rossi, è il rho delle put. La prima osservazione che facciamo è che il rho delle call è positivo e quello delle put è negativo. Ciò significa che all'aumentare del tasso r il prezzo delle call aumenta e quello delle put diminuisce. Inoltre, tanto più un'opzione diviene otm e tanto minore risulta la dipendenza da rho. Viceversa, quanto più l'opzione diviene itm, tanto maggiore è la dipendenza da rho. Ciò accade sia per le call che per le put.

Per spiegare in modo esaustivo tale affermazione occorrerebbe ricorrere al modello B&S e, in particolare, alle formule che esprimono le derivate parziali del prezzo della call rispetto al tasso r e del prezzo della put, sempre rispetto al tasso r. Nel primo caso assisteremmo a due effetti contrapposti: uno, il fattore di attualizzazione, che gioca negativamente; l'altro, il cosiddetto drift del processo S, che invece gioca positivamente. Si osserva poi che i due effetti, combinati assieme, danno un risultato globalmente positivo.

Nel secondo caso, invece, si determina un rho negativo in quanto i due effetti agiscono entrambi negativamente.

In uno dei prossimi articoli, se ve ne sarà l'interesse, affronteremo lo studio di tale modello, in senso strettamente matematico, ripercorrendo le tappe che hanno condotto Black, Scholes e Merton alla formulazione del medesimo che, qualche anno più tardi (1996), ha aperto loro le porte del Nobel (che Fisher Black non ritirò in quanto, nel 1995, era sopraggiunta la sua morte).

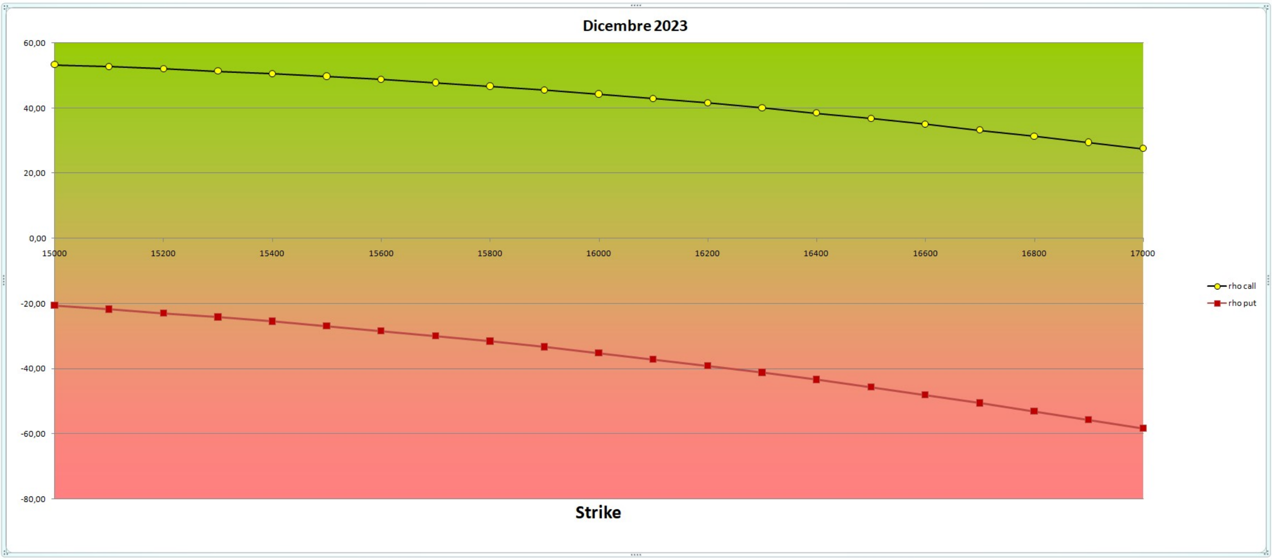
Per ora, limitiamoci ad affermare che quanto più l'opzione è itm, tanto maggiore è la probabilità che tale opzione sarà esercitata, divenendo così concreto l'esborso del denaro per l'acquisto del sottostante.

Scadenza media

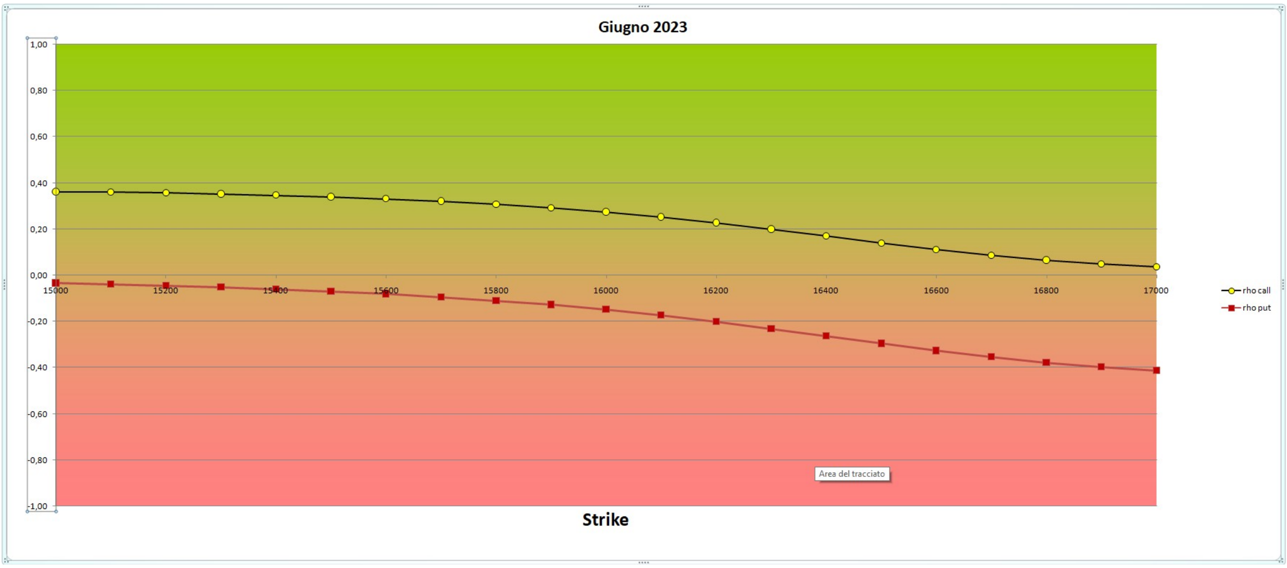
Se aumentiamo la durata del contratto, portandola ad un'ampiezza (quasi) trimestrale, si osserva che i profili delle due curve rimangono analoghi. La curva del rho delle call, però, si è spostata verso l'alto. E quella delle put verso il basso: in sostanza, a parte la differenza di segno algebrico, entrambi i rho aumentano in valore assoluto. Ciò è dovuto al maggior costo legato al tasso di interesse, che come sappiamo, è commisurato alla durata del prestito.

Scadenza lunga

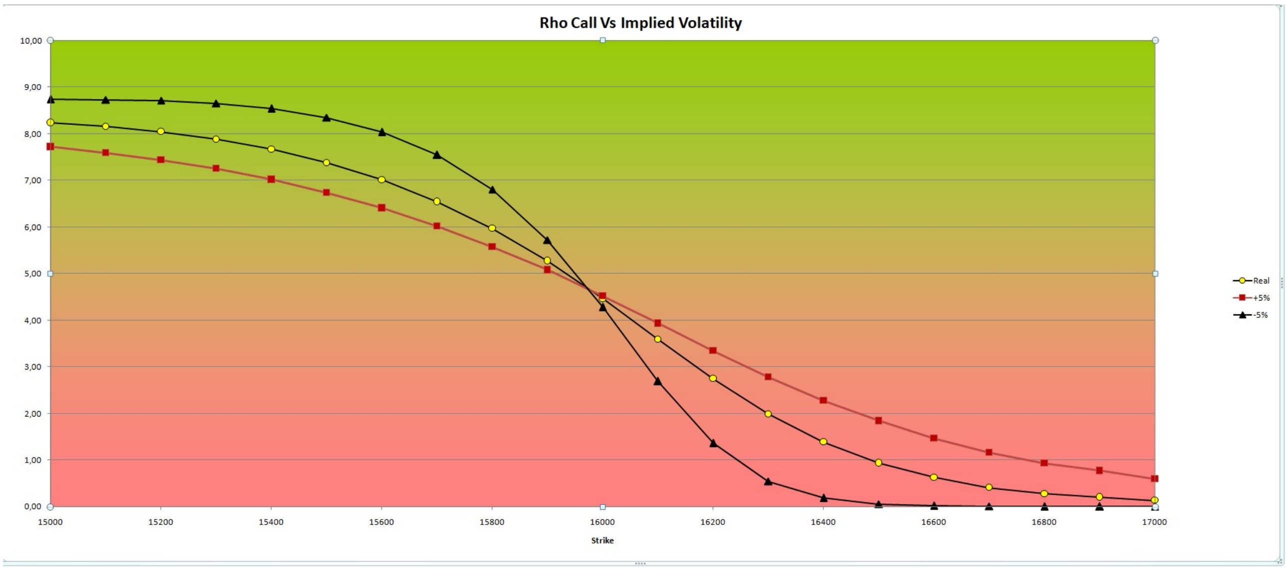
Un ulteriore aumento della durata del contratto, arrivando, in questo caso, ad un'ampiezza quasi semestrale, conferma quanto già osservato nella precedente scadenza: i profili delle due curve continuano ad essere analoghi a quelli della scadenza breve. La curva del rho delle call si sposta ancor più verso l'alto. E quella delle put verso il basso. Il costo legato al tasso di interesse, in questo caso, è ancor più rimarchevole stante la maggiore durata del contratto.



In conclusione, più l'opzione si avvicina alla sua data di scadenza e minore sarà il valore di tale greca (minore, relativamente, per la call e minore, in modulo, per la put). In sostanza, riguardando gli ultimi tre grafici, dobbiamo immaginare che al diminuire del tempo di vita del contratto di opzione, sempre più ravvicinate tra loro saranno le curve a pallini gialli e quadratini rossi (poco sopra lo zero, per le call; poco sotto, lo zero, per le put).
Per comprendere meglio questo passaggio, e siccome un'immagine vale più di mille parole, nel grafico successivo, ho riportato la curva del rho della call e della put scadenza giugno 2023: in pratica si tratta di contratti che hanno ormai solo un giorno di vita!



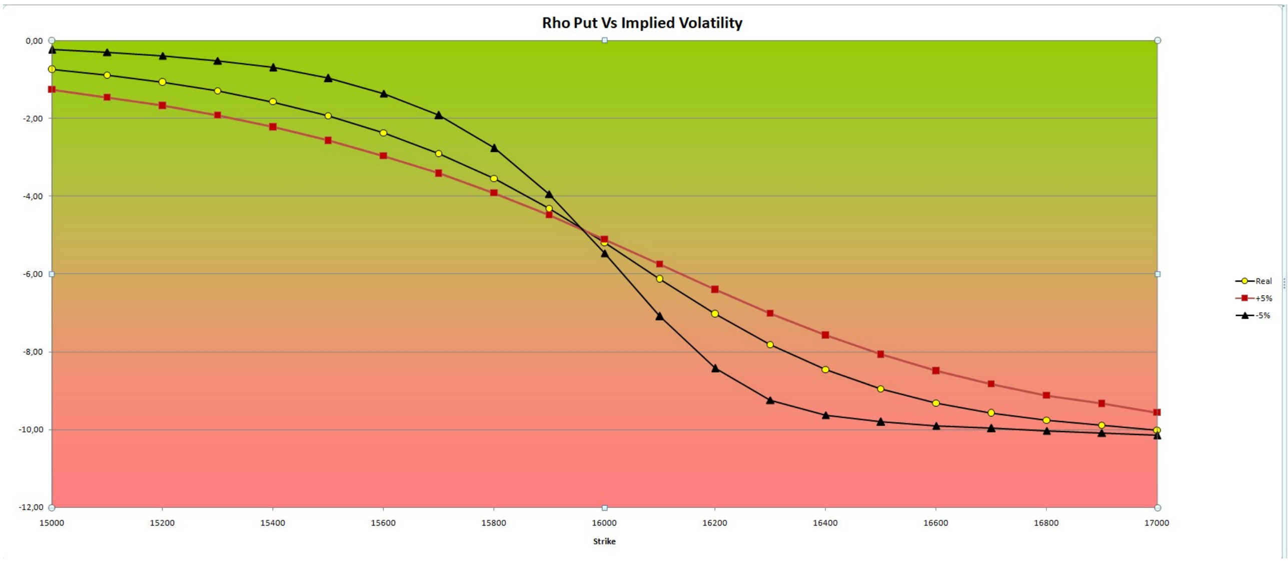
Rho al variare della volatilità implicita



Che cosa succede,a questa greca, se varia la volatilità implicita? Il grafico precedente, curva a pallini gialli, mostra l'andamento di Rho (opzioni call), al variare del sottostante, per la scadenza luglio (a breve), con la volatilità implicita del momento in cui scrivo (29/06/2023). Se aumentiamo la volatilità implicita di una percentuale pari al 5%, Rho diminuisce per le opzioni itm ed aumenta per quelle otm.

Mentre, se riduciamo del 5%, la volatilità implicita, l'andamento di Rho si rovescia: aumenta per le opzioni itm e diminuisce per quelle otm. Le tre curve, come si nota dal grafico, si intersecano in corrispondenza dello strike atm.

Il grafico successivo, invece, si riferisce all'andamento di Rho per le put, con pari scadenza ed analoghi incrementi e decrementi della volatilità implicita. Occorre ricordare che, per le put, Rho è negativa.



Conclusioni

Che cosa possiamo concludere dopo un breve escursus sulle caratteristiche di questa greca? Proviamo a fare il punto.

Per le call Rho è positivo e per le put è negativo: ciò significa che se aumentano i tassi, le call diverranno più costose e le put, al contrario, costeranno meno.

Queste variazioni sul prezzo delle opzioni, con gli attuali livelli dei tassi, sono poco influenti sulle scadenze brevi; ma, su quelle lunghe, cominciano ad essere rilevanti. Pertanto, se si imposta una strategia sul lungo periodo occorre tenerne conto.

Inoltre, in uno scenario di tassi che, dopo essere cresciuti, cominciano a scendere, chi avrà acquistato call a lunga scadenza si troverà ad essere doppiamente penalizzato:

(1) dalla discesa del tasso r, che impatterà negativamente sul prezzo della call;
(2) dal fatto che, trascorrendo il tempo, il tasso r applicato sarà più basso e, anche questo effetto, giocherà negativamente sul prezzo della call. Per le put, invece, rovesciano il ragionamento, solo vantaggi.

Naturalmente l'acquirente di opzioni, sia call che put, avrà sempre contro il decadimento temporale del loro prezzo: ma questa è un'altra storia!

Alla prossima.