La volatilità (parte terza)

Premessa

Dopo la necessaria parentesi richiesta per la trattazione di una greca, il rho, che da un po' di tempo era divenuta fuori moda (ma che con la ripresa dei tassi sembrava gridare per richiamare su di sé l'attenzione dell'opzionista), riprendiamo il discorso sulla volatilità.

In questo articolo dovremo necessariamente richiamare alcuni concetti che appartengono ad ambiti della matematica, teoria della probabilità e statistica, che sono stati fondamentali per la derivazione del modello di *pricing* delle opzioni ideato da Black and Scholes (B&S).

Alla base di tutto c'è la normale, o gaussiana

Non è per caso che Carl Friedrich Gauss(1777-1855), nella comunità scientifica, sia spesso appellato come "il principe dei matematici". Sono così tanti i contributi di nuove conoscenze che questo matematico ha dato ad ogni branca della disciplina, sia pura che applicata, che un intero volume non sarebbe sufficiente per accoglierli tutti. La grandiosità di questo studioso è dovuta, soprattutto, all'ampiezza dei temi ai quali egli si dedicò con successo. La matematica è tanto vasta che coloro che vi si dedicano conoscono in modo approfondito solo la parte più vicina al loro campo di ricerca. Il genio di Gauss, invece, gli consentì di eccellere in una moltitudine di rami anche molto diversi tra loro: dall'analisi matematica, all'analisi numerica, dalla geometria all'algebra, dalla statistica alla fisica-matematica.

Gauss si imbatté nella nota curva a campana quando, effettuando calcoli astronomici, si trovò di fronte al problema degli errori di misurazione. Ripetendo le stesse misure, i risultati non erano mai gli stessi, ma differivano leggermente. Notò, poi, che la media di queste misure si situava in una posizione pressoché centrale e che gli scarti[(1)] non si disperdevano attorno a tale media in modo uniforme ma con un andamento a campana. Ampi scarti dalla media erano meno probabili[(2)] rispetto a scarti piccoli.

Per descrivere l'andamento degli scarti, Gauss pensò ad una funzione del tipo:

$$y = e^{-x^2}$$

La funzione esponenziale

La funzione esponenziale è una funzione particolarmente importante in analisi matematica e non solo. Essa è alla base di molti fenomeni fisici (carica e scarica elettrica di un condensatore e di un induttore, decadimento radioattivo, distribuzione esponenziale in teoria della probabilità, solo per fare qualche esempio) e quel numero, ***e***[(3)], è un numero irrazionale che vale: $e = 2{,}71828\ldots$

con infinite cifre dopo la virgola.

Il grafico della funzione esponenziale, $y = e^x$

è indicato nella figura successiva.

[(1)] Differenza tra la singola misura e la media
[(2)] Meglio sarebbe dire "meno frequenti"
[(3)] Questa costante è chiamata numero di Eulero

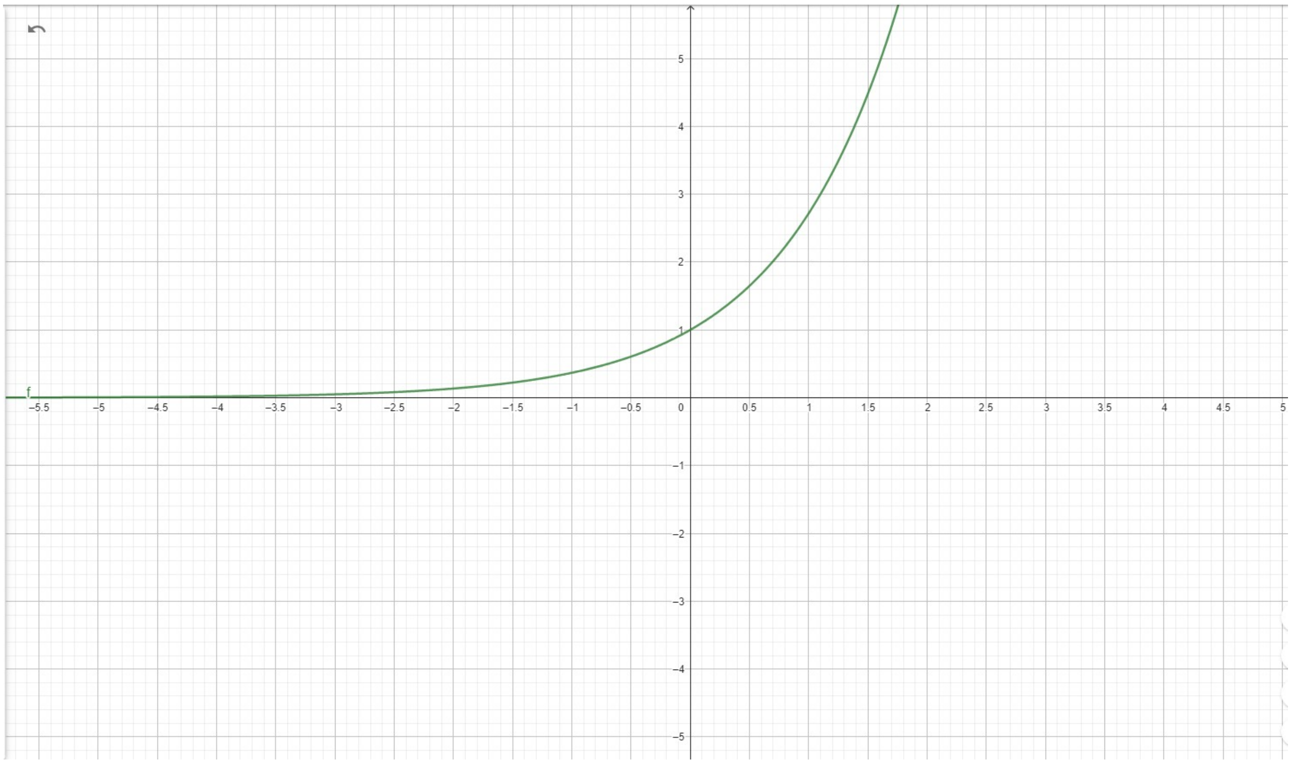


Figura 1

Si tratta di una funzione sempre positiva (il grafico non scende mai sotto l'asse delle ascisse) che tende a zero, per x che tende a -∞, e tende a +∞, per x che tende a +∞.

Se proviamo a cambiare segno all'esponente, si trova la funzione esponenziale decrescente, $y = e^{-x}$

Il cui grafico è mostrato in figura 2.

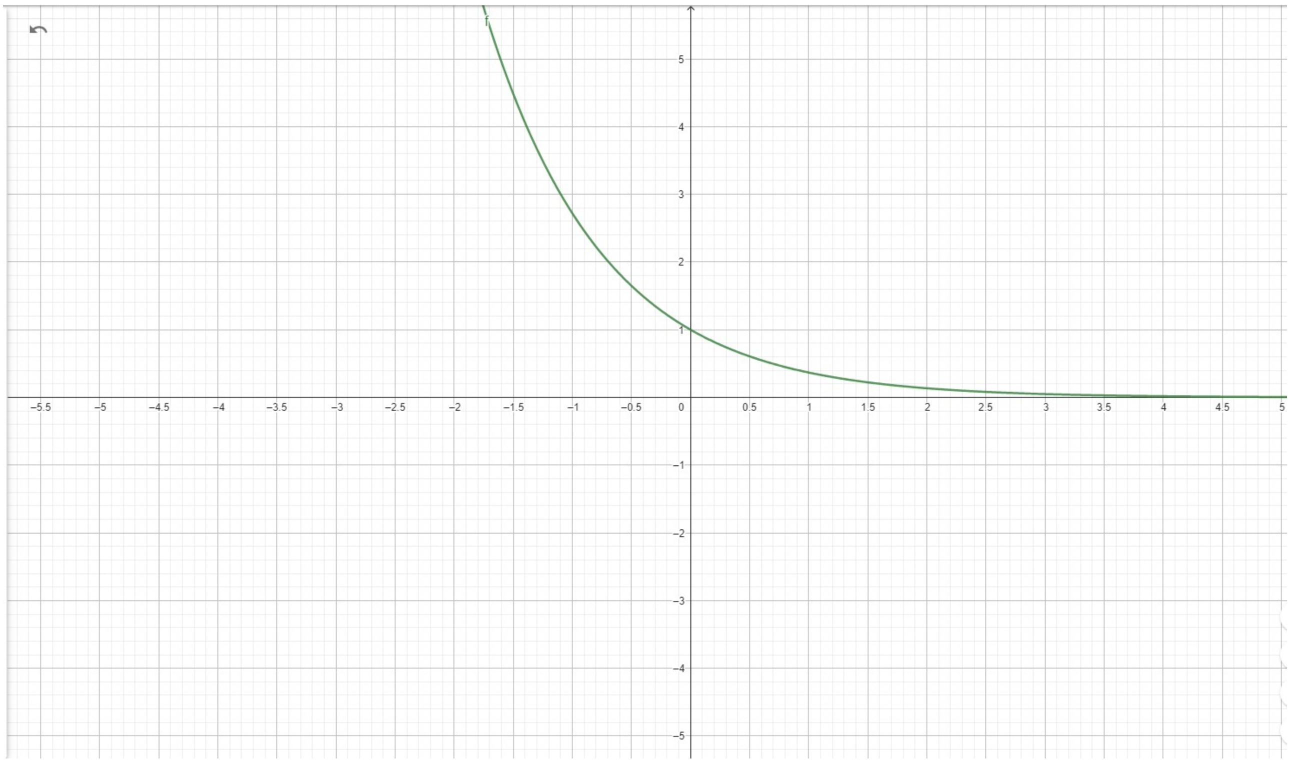


Figura 2

Anche questa è una funzione sempre positiva che, però, tende a zero, per x che tende a +∞, e tende a +∞, per x che tende a -∞.

Torniamo ora a Gauss. Il nostro genio era alla ricerca di una funzione che descrivesse l'andamento degli scarti e, come scritto sopra, pensò ad $y = e^{-x^2}$. Vediamo subito il grafico di questa funzione in figura 3.

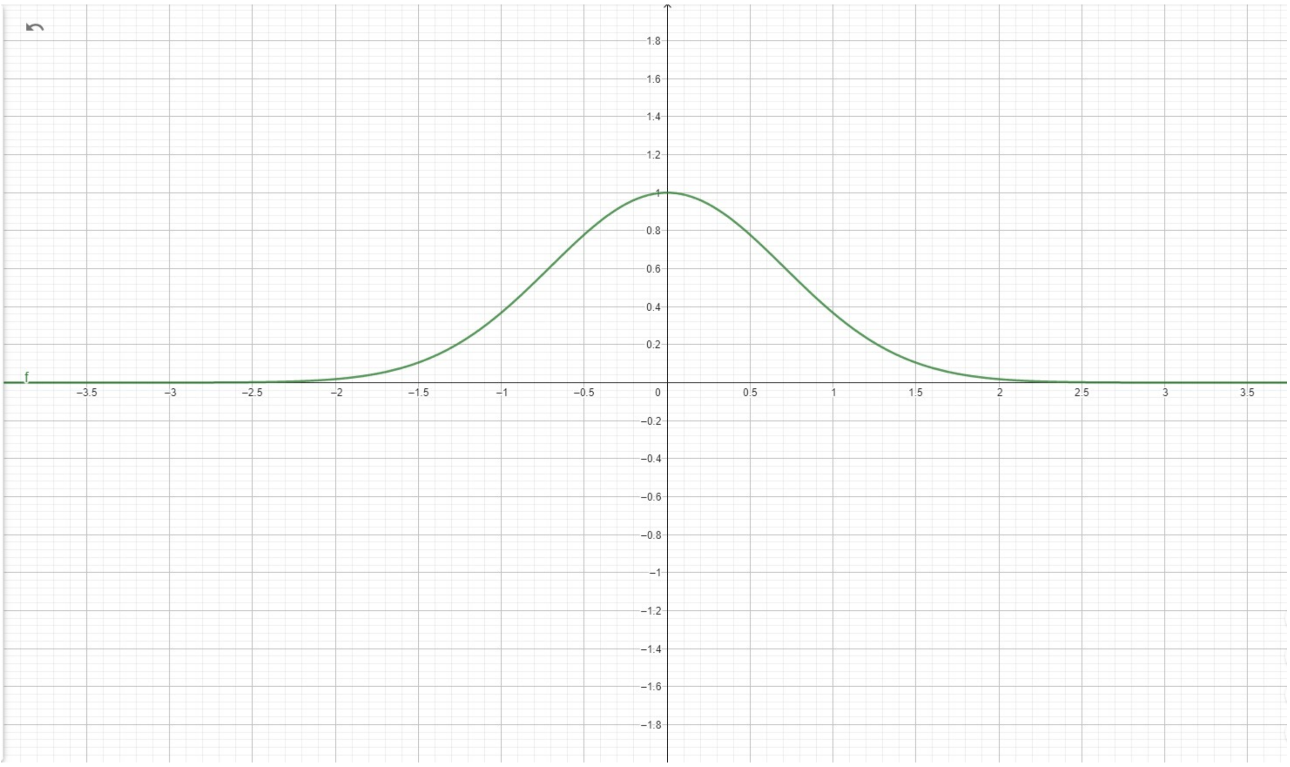


Figura 3

Si tratta di una funzione simmetrica con l'asse di simmetria coincidente con l'asse delle ordinate. Il massimo della funzione, per x=0, vale y=1 e si trova proprio sull'asse di simmetria. Infatti, $e^0 = 1$.

La simmetria si spiega con il fatto che l'esponente, come si può notare, è il quadrato di x ed il quadrato di un numero negativo è sempre positivo. Pertanto, per x=1 si avrà $y = e^{-x^2} = e^{-1} = \frac{1}{e} = 0{,}3678 \ldots$. Ma lo stesso risultato si avrà per x=-1, in quanto il quadrato di -1 restituisce sempre +1!

Naturalmente $y = e^{-x^2}$ è solo la struttura della funzione, diciamo pure il cuore. La funzione completa che Gauss propose è:

$$y = \lambda \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

dove:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mu}: valor\ medio\ delle\ misure \\ \boldsymbol{x-\mu}: scarto\ della\ generica\ misura, x,\ \ dalla\ media \\ \boldsymbol{\sigma}: variabilit\grave{a}\ dei\ dati\ (dipende\ dallo\ strumento\ di\ rilevazione) \\ \boldsymbol{\lambda}: una\ costante\ che\ serve\ per\ rendere\ y\ una\ funzione\ di\ probabilit\grave{a} \end{cases}$$

(il significato di λ sarà più chiaro con il prosieguo della lettura).

Le distribuzioni di probabilità (o funzioni di probabilità)

Le distribuzioni di probabilità sono uno dei ponti che collegano la disciplina della statistica e quella della teoria della probabilità. Possono essere *discrete* o *continue*. Prima, però, dobbiamo capire il concetto di *variabile casuale* (o *aleatoria* o *stocastica*).

Variabili casuali

Una variabile casuale è l'insieme dei possibili risultati numerici di un *esperimento casuale*. Inoltre, un esperimento si dice casuale se i suoi esiti non sono prevedibili con certezza. Occorre aggiungere, infine, che gli esiti dell'esperimento devono essere *incompatibili* e *complementari*. Facciamo un esempio. Consideriamo l'esperimento "lancio di un dado (non truccato) a sei facce". Questo esperimento è caratterizzato dalla variabile casuale X (in genere si usano le lettere maiuscole per denominare una variabile casuale) che può assumere i valori:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \text{ e } x_6$$

ognuno di questi sei valori è associato ad uno dei possibili sei eventi:

E_1: lanciando il dado esce il numero 1

E_2: lanciando il dado esce il numero 2

E_3: lanciando il dado esce il numero 3

E_4: lanciando il dado esce il numero 4

E_5: lanciando il dado esce il numero 5

E_6: lanciando il dado esce il numero 6

Ad ognuno dei sei eventi, è associata una probabilità. Nell'esempio in questione:

$$p_1=p(E_1)=1/6$$

$$p_2=p(E_2)=1/6$$

$$p_3=p(E_3)=1/6$$

$$p_4=p(E_4)=1/6$$

$$p_5=p(E_5)=1/6$$

$$p_6=p(E_6)=1/6$$

I sei eventi sono incompatibili e complementari: il verificarsi di uno di essi, infatti, esclude il verificarsi contemporaneo di un qualsiasi altro evento; al tempo stesso, però, uno di essi deve necessariamente verificarsi.

L'esempio appena mostrato ci indica un esperimento casuale a cui è associata una variabile *casuale discreta*. Una variabile casuale, infatti, si definisce discreta se il numero di valori che può assumere è finito[(4)]. Mentre, al contrario, una variabile casuale è continua se può assumere un numero infinito di valori[(5)]. Per chiarire il concetto è necessario fare un esempio: il peso dei neonati o l'altezza degli individui costituiscono una variabile casuale continua perché i valori assunti possono essere infiniti, anche se compresi tra due estremi. Anche i rendimenti giornalieri (oppure orari, settimanali, mensili, ecc.) di

---

(4) Oppure un'infinità numerabile di valori.

(5) Sarebbe meglio dire "infinità più che numerabile".

un'attività finanziaria sono classificabile come una variabile casuale continua. La temperatura in un giorno è una variabile continua anche se per esempio può variare tra 15° e 30°.

Distribuzioni di probabilità

Distribuzioni di probabilità discrete

Partiamo dalle distribuzioni di probabilità discrete. Supponiamo che X sia una variabile casuale discreta che può assumere gli n valori:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n,$$

si supponga, inoltre, che le probabilità di assumere tali valori siano:

$$P(X = x_k) = f(x_k)\ per\ k = 1,2,3, \dots, n$$

- questa scrittura va letta in questo modo: la probabilità che la variabile casuale X si presenti nella modalità x_k, vale $f(x_k)$ -

Definiamo funzione di probabilità, o distribuzione di probabilità:

$$P(X = x) = f(x)$$

- che si legge "la probabilità che la variabile casuale X si presenti nella modalità x, vale f(x)" -

In generale f(x) è una funzione di probabilità (discreta) se:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \sum_x f(x) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

In sostanza una funzione di probabilità è sempre positiva (non avrebbe senso una probabilità negativa); inoltre, la somma di tutte le probabilità deve essere 1 (la sommatoria è estesa a tutti i possibili valori che può assumere la variabile casuale). La rappresentazione grafica di f(x) è anche detta *grafico di probabilità*.

Esempio

Immaginiamo il seguente esperimento casuale:

"numero di volte che esce la faccia "testa" lanciando due volte di seguito una moneta non truccata".

Quali e quanti sono i possibili esiti? Vediamoli assieme. Indichiamo con T, l'evento "testa" e con C, l'evento "croce". Avremo:

Variabile casuale	TT	TC	CT	CC
X	2	1	1	0

CC significa che sono uscite due croci e, pertanto, il numero di teste è zero. TC e CT sono due esiti che differiscono solo per l'ordine con cui si sono presentate le facce della moneta; ma il numero di teste è sempre 1. TT vuol dire che è uscita la faccia testa per due volte e, quindi, il numero di teste è due.

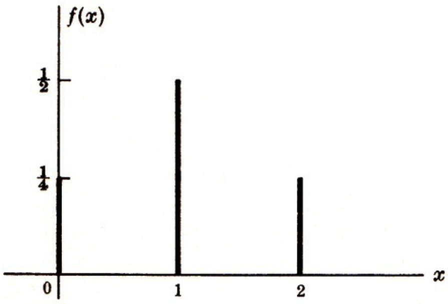
Se la moneta è non truccata, le probabilità associate ai quattro possibili eventi sono:

$$p(TT) = \frac{1}{4} \quad p(TC) = \frac{1}{4} \quad p(CT) = \frac{1}{4} \quad p(CC) = \frac{1}{4}$$

Quali sono i valori assunti dalla funzione di probabilità? Vediamoli nella tabella successiva:

x	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

che dobbiamo leggere in questo modo: alla modalità x=0 (nessuna testa) è associata una probabilità di 1/4, o del 25%; la modalità x=1 (una testa) ha probabilità di occorrere di 2/4, o 1/2, o 50%; infine, x=2 (due teste) corrisponde a quell'esito dell'esperimento che ha probabilità di verificarsi di 1/4, o del 25%.



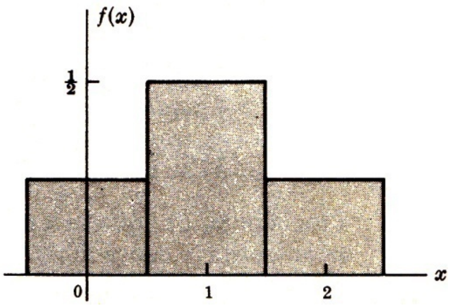


Figura 4

La figura 4 ci mostra due possibili rappresentazioni del grafico di probabilità.

Proviamo a vedere se sono soddisfatte le condizioni (1) prima espresse nel caso di questo esperimento casuale. Se guardiamo il grafico di sinistra e procediamo con la somma delle probabilità associate ad ognuna delle possibili modalità del nostro esperimento, si ottiene:

$$\sum_{x=0}^{2} f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

che corrisponde a quanto già affermato: *la somma delle probabilità delle modalità che costituiscono l'intero universo di una variabile casuale deve essere sempre pari ad 1*.

Allo stesso risultato si può pervenire guardando il grafico di destra e procedendo con la somma delle aree dei tre rettangoli (ognuno di base unitaria).

Inoltre, come si può notare, il valore assunto da f(x) per ogni x è sempre positivo.

Distribuzioni di probabilità continue

Se X è una variabile casuale continua, allora il numero di valori che essa potrà assumere non sarà più limitato ad n, ma sarà infinito. Inoltre, la probabilità che essa possa assumere un particolare valore, è nulla e quindi non possiamo definire una funzione di probabilità in modo simile a quanto già fatto per una variabile casuale discreta. Se ci pensiamo un momento, dovremmo concludere che è sicuramente sensato affermare che esiste una probabilità che X sia compresa tra due diversi valori[6]. Postuliamo, allora, l'esistenza di una funzione f(x) tale che:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{cases} \qquad (2)$$

[6] Se si sceglie a caso un adulto da un gruppo numeroso, la probabilità che il suo peso sia 80 kg (cioè esattamente 80,000000000… kg) è pari a zero. Tuttavia esiste una probabilità, maggiore di zero, che il suo peso sia compreso tra 79,5 kg e 80,5 kg.

La prima condizione riafferma quanto già visto per le distribuzioni di probabilità discrete: la probabilità è un numero sempre maggiore o uguale a zero. La seconda, invece, ci dice due cose: che la variabile casuale continua varia tra -∞ e + ∞ (al più); e che la probabilità che si verifichi uno qualunque, tra tutti gli eventi possibili, deve essere sempre uguale ad 1.

Una funzione che soddisfa le condizioni (2) è detta funzione di probabilità o distribuzione di probabilità di una variabile casuale continua o, semplicemente, *densità di probabilità*.

Una doverosa precisazione. La scrittura:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

- si legge: integrale di f(x) in dx, tra meno e più infinito -

Ma cosa significa il calcolo di questo integrale? Da un punto di vista geometrico, la scrittura:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

significa calcolare l'area sottesa dalla funzione f(x), lungo l'asse delle x, tra gli estremi a e b (vedi figura 5).

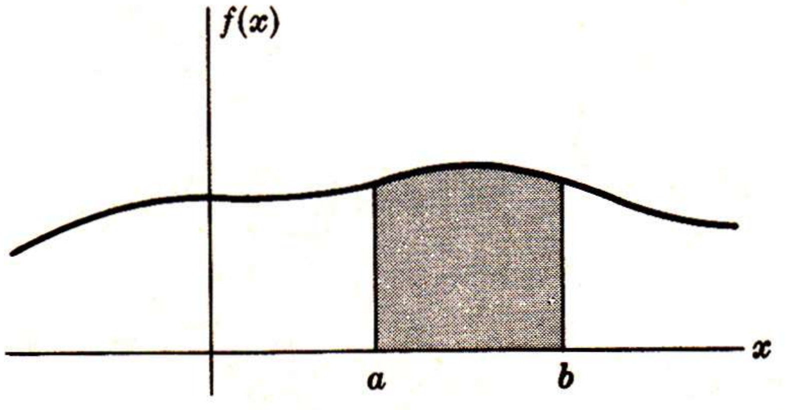


Figura 5

Pertanto, la scrittura:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

significa eseguire la somma delle probabilità associate a tutti i possibili eventi. E, non vi è dubbio, che tale calcolo deve necessariamente essere uguale ad 1 (o al 100%).

Sulla base di quanto appena affermato, possiamo chiudere questo paragrafo con un'ultima definizione: la probabilità che X sia compresa tra a e b si calcola nel seguente modo:

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Facciamo un esempio. Se volessimo calcolare la probabilità che il peso di un individuo sia compreso tra 75,0 kg e 80,0 kg, e supponendo che la distribuzione di probabilità sia quella indicata in figura 6, dovremmo eseguire il calcolo dell'area indicata nella figura medesima.

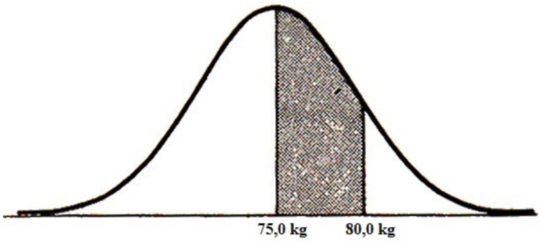


Figura 6

Propongo un esercizio per chi ha dimestichezza con il calcolo integrale e vuole misurarsi sul tema che stiamo affrontando (guardate la soluzione, solo dopo averci provato!).

Sia f(x) una densità di probabilità. Calcolare la costante c per cui:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 per\ 0 < x < 3 \\ 0 \quad altrimenti \end{cases}$$

Determinare, successivamente, la probabilità P(1<X<2).

Soluzione

Imporre la prima condizione, significa imporre che:

$$cx^2 \geq 0$$

E, dal momento che x^2 è sempre positivo, allora dovrà necessariamente essere:

$$c \geq 0$$

La seconda condizione richiede che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Siccome la funzione, al di fuori dell'intervallo per 0<x<3, vale zero, allora possiamo scrivere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^3 cx^2 dx = c \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9c$$

Siccome il risultato dell'integrale deve essere pari ad 1, allora avremo 9c=1, e questo implica che c=1/9.

Infine:

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \frac{1}{9} x^2 dx = \frac{1}{9} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{9} \cdot \left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right] = \frac{7}{27}$$

I parametri della gaussiana

Ora che abbiamo compreso che cosa intendiamo per distribuzione di probabilità, possiamo tornare alla nostra curva a campana. Diciamo subito che si tratta di una distribuzione di probabilità continua tra le più diffuse nell'analisi statistica. La ragione principale di una tale diffusività è che con tale funzione possiamo descrivere molto accuratamente la maggior parte dei fenomeni naturali, medici, industriali, fisici e finanziari. Si tratta di fenomeni dove le modalità con cui si presenta la variabile casuale sotto esame sono più frequenti attorno al valor medio mentre, più ci allontaniamo da esso, più rare (o meno probabili) sono le modalità con cui tale variabile si presenta. In tale distribuzione, si ha che il valor medio, la mediana e la moda (ovvero il valore che si presenta con maggior frequenza) coincidono. La formula l'abbiamo già vista. Ma ora la ripresentiamo, in modo leggermente diverso, e tra breve (nel riquadro di approfondimento successivo) spiegheremo perché.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} \tag{3}$$

Nonostante la particolare complessità della formula, occorre dire che per definire completamente una gaussiana sono necessari solo due parametri: μ (valor medio) e σ (deviazione standard). E questo, innegabilmente, è un grande vantaggio. All'aumentare di μ la curva si sposta verso destra e viceversa. Al diminuire di σ la curva tende ad essere più appuntita; mentre, più σ aumenta e più la curva si presenterà spanciata.

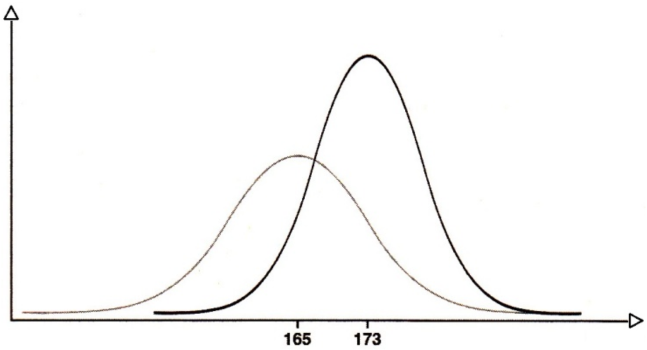


Figura 7

La figura 7, ad esempio, mostra due curve normali: quella a tratto meno marcato ha un valor medio pari a 165. L'altra, che ha un valor medio maggiore, è più spostata verso destra. Inoltre, quella a valor medio maggiore, ha una deviazione standard minore e, pertanto, la curva risulta un po' più appuntita dell'altra.

Entrambe, però, debbono sottendere lungo l'asse delle ascisse un'area pari ad 1, altrimenti non potrebbero essere distribuzioni di probabilità!

La funzione che è alla base della curva di Gauss è:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Sappiamo, inoltre, che se f(x) è una densità di probabilità è necessario che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Ora, l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

è un integrale speciale, da un lato, e problematico, dall'altro. Perché problematico? Perché non è risolubile per via analitica ma solo per via numerica. Ora, non è questa la sede per capire come si risolve un integrale per mezzo dei metodi che l'analisi numerica ci mette a disposizione (metodo dei trapezi, dei rettangoli, di Montecarlo, ecc.); diremo solo che, applicando uno di tali metodi si perviene a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

E qui si comincia a comprendere la vera anima di questo integrale; è sufficiente dire, osservando la precedente relazione, che in essa compaiono due tra le grandezze trascendenti più importanti della matematica e della fisica: il numero di Eulero e pi greco. Questo integrale è così speciale che gli è stato dato perfino un nome: integrale di Gauss! E come poteva essere altrimenti!

Ora, per spiegare la costante che compare nella (3) aggiungiamo che la funzione base con cui Gauss costruisce il suo modello è:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

e che, si dimostra:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}$$

Pertanto, se modifichiamo la nostra funzione come segue:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

avremo che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1$$

Conclusioni

Spero di non aver richiesto al lettore uno sforzo eccessivo. D'altronde, se si vogliono comprendere sino in fondo molti dei modelli che la finanza quantitativa ha proposto in questi anni, come la formula di Black & Scholes, la comprensione della curva di Gauss è fondamentale. Non è un caso che Ian Stewart, ricercatore e studioso di storia della matematica, in una pubblicazione del 2013[7], abbia individuato 17 equazioni che hanno cambiato il corso della Storia: tra le quali figurano la formula di Black & Scholes e la curva di Gauss!

Ed ora, che cosa ci aspetta? Nel prossimo numero faremo vedere come, alla luce di quanto abbiamo appreso quest'oggi, possiamo reinterpretare la volatilità storica dei rendimenti giornalieri di un'attività finanziaria. Vedremo, inoltre, la differenza tra volatilità storica e volatilità implicita e come, grazie al calcolo di quest'ultima, si possa … prevedere il futuro!

Alla prossima!

[7] *In pursuit of the unknown: 17 equations that changed the world* – (2013)