La volatilità (parte quarta)

Premessa

Proseguiamo con le nostre considerazioni sulla funzione di probabilità gaussiana introducendo la distribuzione normale standard ed osservando come questa si riveli particolarmente utile nel confronto di fenomeni che si distribuiscono, sempre normalmente, ma in modo diverso.

Vedremo anche alcuni esempi di finanza quantitativa e di come, ancora una volta, il foglio di calcolo si riveli uno strumento estremamente potente e versatile ed un compagno di lavoro del quale, oggi, non possiamo più fare a meno.

La distribuzione normale standard

Una qualunque distribuzione normale, avente un certo valor medio, μ, ed una certa deviazione standard, σ, può sempre essere ricondotta alla distribuzione normale standard. I vantaggi di una tale trasformazione sono essenzialmente due: l'indipendenza dall'unità di misura ed il confronto, praticamente immediato, tra distribuzioni differenti. E, a tal proposito, occorre ricordare che nella maggior parte dei casi il confronto tra fenomeni diversi è l'obiettivo principale dell'investigazione statistica.

Ma che cos'è la distribuzione normale standard? È quella particolare distribuzione con valor medio nullo e deviazione standard unitaria. Ovvero:

$$\begin{cases} \mu = 0 \\ \sigma = 1 \end{cases}$$

Nel precedente articolo (La volatilità – parte terza), avevamo indicato (formula 3) la distribuzione normale nel seguente modo:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2}$$

dove x rappresenta una generica osservazione ed f(x) la funzione di probabilità associata a tale osservazione. Ora, per eseguire la trasformazione di una distribuzione normale nella normale standard, occorre, per ogni x, calcolare il corrispondente valore standard, che indichiamo con z, con la semplice formula:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Dopo tale trasformazione la funzione di densità di probabilità della normale standardizzata diviene:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

il cui grafico è quello mostrato in figura 1.

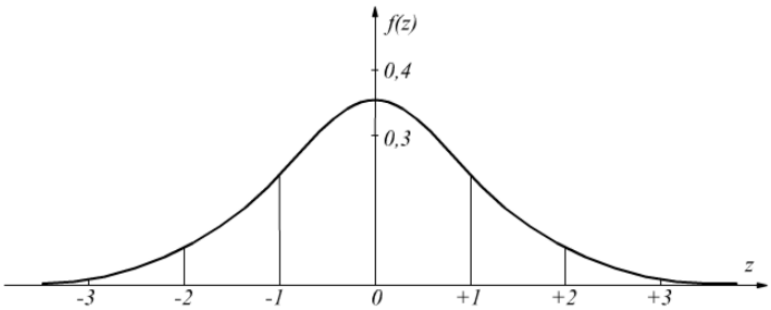


Figura 1

Si noti il valor medio eguale a zero e la deviazione standard pari ad uno. È una funzione che appartiene alla classe delle funzioni *pari*, come le chiamano i matematici, per le quali vale la relazione:

$$f(x) = f(-x)$$

che si legge "dato un x, la funzione assume, per esso, lo stesso valore che assume per -x". Ad esempio, osservando il grafico, vediamo che la funzione assume lo stesso valore per z=1 e per z=-1 (circa 0,24). Lo stesso accade, per z=2 e per z=-2 (circa 0,05). E così via per tutti gli infiniti valori di z.

Le funzioni pari hanno, quale asse di simmetria, l'asse delle ordinate. E questa è una proprietà che, più avanti, ci tornerà molto utile e mostrerò come sfruttarla.

Come si può notare, con tale trasformazione si viene a "perdere" l'unità di misura di x e si ottiene una nuova variabile, z, che è adimensionale ed espressa in unità di σ. Cerchiamo di chiarire questo aspetto con un esempio. Supponiamo di aver eseguito la misura dell'altezza di un gruppo di 1000 persone e che tali misure si distribuiscano normalmente con valor medio 174 cm e deviazione standard 10 cm. Ora, proviamo a trasformare una di queste rilevazioni, pari a 184 cm, nella corrispondente standard:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{184 - 174}{10} = 1$$

che cosa significa z=1? Vuol dire che quella rilevazione si trova ad una deviazione standard dal valor medio. E, infatti, siccome la deviazione standard è di 10 cm, la misura di 184 cm si trova ad una distanza, dal valor medio (che è pari a 174 cm), proprio uguale a 10 cm.

Facciamo un altro esempio. Proviamo a trasformare la rilevazione 159 cm, nella corrispondente standard:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{159 - 174}{10} = -1{,}5$$

Ed ora, cosa significa z=-1,5? Vuol dire che quella rilevazione si trova ad 1,5 deviazioni standard dal valor medio. Il segno negativo, inoltre, ci dice che la sua posizione è a sinistra del valor medio e non a destra, come invece accade per le rilevazioni positive (come nell'esempio precedente). E, infatti, siccome la deviazione standard è di 10 cm, la misura di 159 cm si trova, dal valor medio proprio a 15 cm di distanza: ovvero, 1,5 volte la deviazione standard.

Quindi, in definitiva, i valori standardizzati non hanno unità di misura[1] e ci dicono a che distanza, rispetto al valor medio, tali valori si trovano in unità di deviazioni standard.

E se volessimo calcolare la probabilità?

E se il nostro problema fosse: *"qual è la probabilità che, incontrando una delle mille persone dell'esempio precedente, questa abbia un'altezza compresa tra 167 cm e 176 cm*?"

Dovremmo, prima, trasformare queste due altezze nelle corrispondenti standardizzate:

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{167-174}{10} = -0{,}7 \\ z_2 = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{176-174}{10} = 0{,}2 \end{cases}$$

e poi risolvere l'integrale:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-0{,}7}^{0{,}2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

Integrale che, come abbiamo avuto già modo di affermare, non si risolve in modo semplice. E allora? Oggi, possiamo risolvere il tutto con un foglio di calcolo, come Excel. E, più avanti, vedremo come fare. Ma, quando frequentavo i banchi di scuola e, successivamente, quelli universitari, il foglio di calcolo non era ancora stato inventato[2]. Ed allora, non rimaneva che far uso delle tavole. Vediamo di che si tratta.

Le tavole di Sheppard

La figura mostra la tavola di Sheppard che consente di avere il valore dell'integrale della normale standardizzata tra zero ed un determinato valore. In questo modo non c'è da svolgere alcun calcolo.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	00000	00399	00792	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32';94	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34849	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46637	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1.9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49745	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49897	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49991	49992	49992	49992
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3.9	49995	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997

Figura 2

[1] Se, nell'esempio mostrato, facciamo l'analisi dimensionale di z troviamo, infatti, che questa variabile è un numero puro, ovvero priva di dimensioni. Ciò in quanto sia il numeratore che il denominatore sono espressi in cm.
[2] Il primo foglio di calcolo, VisiCalc, è del 1979 ed è dovuto a Dan Bricklin.

Sugli assi sono riportati i valori di z mentre all'interno vengono indicati i valori dell'area sottesa dalla curva tra zero e z. Facciamo un esempio. Se volessimo trovare l'area compresa tra zero e 1,18 dovremmo cercare 1,1 sulla prima colonna e poi scorrere sulla riga individuata da 1,1 fino ad incrociare la colonna 0,08 (1,1+0,08=1,18). Troveremmo, in tal caso, 38100. Essendo solo decimali, lo dovremmo leggere come 0,381 o, 38,1%. Ciò significa che la probabilità che la variabile standardizzata assuma un valore compreso tra zero e 1,18 è del 38,1%.

Ora, siccome abbiamo detto prima che la nostra funzione è pari, allora possiamo affermare che l'area sottesa dalla curva tra zero ed 1, ad esempio, è la stessa che la curva sottende tra -1 e 0. Quindi, torniamo al nostro problemino. Calcoliamo, dapprima, la probabilità che z sia compresa tra 0 e 0,2:

$$P(0 \leq z \leq 0{,}2) \cong 7{,}9\%$$

e poi, la probabilità che z sia compresa tra -0,7 e 0. Da quanto affermato in precedenza, tale probabilità è la stessa che c'è se z è compreso tra 0 e 0,7. Quindi:

$$P(-0{,}7 \leq z \leq 0) = P(0 \leq z \leq 0{,}7) \cong 25{,}8\%$$

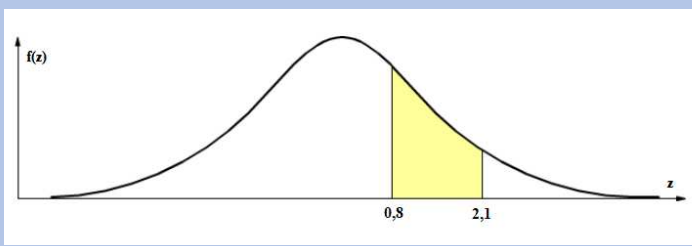
in definitiva:

$$P(-0{,}7 \leq z \leq 0{,}2) = P(-0{,}7 \leq z \leq 0) + P(0 \leq z \leq 0{,}2) \cong 33{,}7\%$$

Pertanto, possiamo rispondere alla precedente domanda nel seguente modo:

la probabilità che, incontrando una delle mille persone dell'esempio precedente, questa abbia un'altezza compresa tra 167 cm e 176 cm è del 33,7% circa.

Ed ora, per esercizio, provate a calcolare la probabilità che la variabile standardizzata, z, sia compresa tra 0,8 e 2,1. In sostanza si tratta di trovare l'area in giallo mostrata nella figura successiva.



[Ris. 0,194 o 19,4%]

E in Excel?

In Excel c'è, ad esempio[3], la funzione:

DISTRIB.NORM.ST(z)

Dobbiamo stare attenti, però, che tale funzione ci restituisce l'area da – ∞ a z. E siccome l'area sottesa dalla curva, da – ∞ a + ∞ è pari ad 1 (si tratta pur sempre di una funzione di probabilità e, l'insieme dei valori assunti da z tra – ∞ e + ∞ rappresenta l'evento certo) e la funzione è pari, vuol dire che le aree da – ∞ a 0 e da 0 a + ∞ sono eguali e pari, ciascuna, a 0,5 (data la simmetria della funzione).

[3] Più avanti, vedremo l'uso anche delle altre funzioni che Excel rende disponibili.

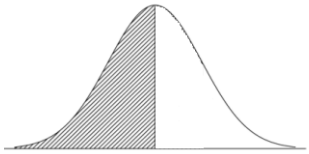


Figura 3 – L’area della funzione tra meno infinito e zero è pari a 0,5

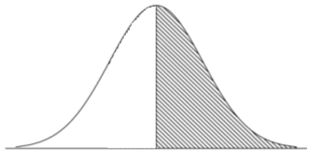


Figura 4 – L’area della funzione tra zero e più infinito è pari a 0,5

Quindi, se interroghiamo Excel come mostrato in figura 5:

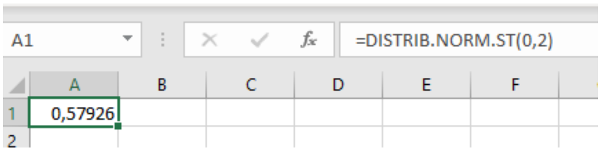


Figura 5

avremo trovato la probabilità che la variabile z sia compresa tra – ∞ e 0,2. Sottraendo 0,5 si torna al valore che abbiamo prima individuato usando la tavola di Sheppard. Per acquisire familiarità, provate a fare qualche esercizio confrontando ciò che vi restituisce Excel con quanto riportato nella tavola di Sheppard.

$$0{,}57926 - 0{,}5 = 0{,}07926$$

Un altro esempio

Cerchiamo di far vedere, con un ulteriore esempio, la potenza di questo strumento di analisi soprattutto nella capacità di confrontare fenomeni che, pur distribuendo in modo gaussiano, lo fanno con medie e deviazioni standard differenti.

Uno studente italiano, che nel periodo dell’Erasmus ha trascorso circa sei mesi di studio presso l’università di Cambridge, ha ivi sostenuto un esame conseguendo la valutazione di 73/100[4]. Tornando in Italia, ha sostenuto un altro esame conseguendo la valutazione di 27/30. Ci chiediamo:

quale delle due prestazioni è relativamente più elevata?

O, in altri termini,

quale delle due prestazioni si è allontanata maggiormente dalla media delle prestazioni dei suoi compagni di corso?

Per fare un confronto, però, i dati indicati non sono sufficienti. Occorre infatti conoscere media e deviazione standard delle due valutazioni.

[4] Il sistema universitario inglese, relativamente alla valutazione (e non solo) è differente da quello italiano. I voti vanno da 0 a 100 e la sufficienza si raggiunge con la valutazione di 40/100.

Orbene, in quel di Cambridge, il nostro studente, si è confrontato con una popolazione che ha ottenuto un voto medio di 57/100 con deviazione standard di 6/100. Mentre, alla nostra latitudine, il voto medio dei suoi compagni si è attestato a 23/30 con deviazione standard pari a 3/30. Procediamo allora con il calcolo delle valutazioni standard.

Il valore standardizzato di 73/100 è pari a:

$$z_1 = \frac{73 - 57}{6} = 2{,}67$$

mentre, quello relativo a 27/30 è pari a:

$$z_2 = \frac{27 - 23}{3} = 1{,}33$$

Concludiamo che la prestazione *fuori casa*, per il nostro studente, è certamente migliore essendosi allontanato, in senso positivo, di ben 2,67 deviazioni standard dalla media, rispetto a quella ottenuta *in casa*, dove il voto conseguito si è distaccato dalla media, sempre positivamente, di 1,33 deviazioni standard.

Un ultimo esempio, finalmente, di finanza quantitativa

Ed ora proviamo ad applicare quanto appreso all'ambito di conoscenza che più ci interessa, la finanza quantitativa. Propongo qui il grafico giornaliero di due indici molto conosciuti: il DAX, trattato alla borsa di Francoforte, ed il CAC 40, rappresentativo del mercato finanziario francese e trattato alla borsa di Parigi.

Figura 6

Il grafico di figura 6 si riferisce al DAX e la freccia che ho riportato, punta alla giornata del 02 agosto 2023. In tale seduta si è registrato un rendimento giornaliero dell'1,37% circa (come mostrato più avanti).

Figura 7

Mentre, quello di figura 7, si riferisce al CAC40. Ed anche in questo caso ho evidenziato, con una freccia, la stessa seduta di borsa. Seduta, nel corso della quale, il valore di chiusura si attesta a -1,27% circa dal valore di chiusura del giorno precedente.

Non possiamo far altro che osservare, d'altronde è storia proprio di questi giorni, che in tale giornata entrambi gli indici abbiano mostrato una performance negativa particolarmente importante, caratterizzata, peraltro, dalla presenza di un gap. La domanda alla quale vogliamo tentare di rispondere è la seguente:

quale delle due performance è relativamente peggiore?

O, in altri termini,

quale dei due rendimenti giornalieri si è allontanato maggiormente dalla propria media?

Ed ora al lavoro, per il reperimento dei dati necessari per poter fornire la risposta alla precedente domanda. Innanzitutto, scarichiamo i dati giornalieri di entrambe le attività finanziarie. Quanti dati? Diciamo un centinaio circa, per il momento.[5] Quindi, calcoliamo i rendimenti giornalieri usando il logaritmo naturale (come abbiamo visto nella seconda parte di questi articoli dedicati alla volatilità) e, successivamente, valor medio e deviazione standard. In figura 8, lo svolgimento di tale lavoro per il DAX.

F3 | =LN(E3/E2)

	A	B	C	D	E	F
1	***Data***	***Open***	***Max***	***Min***	***Close***	***RendGiorn%***
2	01/03/2023	15399,91	15478,84	15254,11	15305,02	
3	02/03/2023	15171,07	15329,29	15150,67	15327,64	0,148%
4	03/03/2023	15430,66	15590,44	15409,99	15578,39	1,623%
5	06/03/2023	15597,9	15677,93	15587,78	15653,58	0,481%
6	07/03/2023	15638,44	15706,37	15544,07	15559,53	-0,603%
7	08/03/2023	15528,81	15667,21	15524,85	15631,87	0,464%
8	09/03/2023	15619,75	15667,05	15535,13	15633,21	0,009%
9	10/03/2023	15369,67	15495,87	15316,38	15427,97	-1,322%
10	13/03/2023	15435,16	15435,81	14887,44	14959,47	-3,084%

Figura 8

[5] La numerosità del campione non è un aspetto secondario, se si vogliono fare inferenze significative. Affronteremo la questione successivamente, quando avremo messo a punto ulteriori strumenti.

… e per il CAC 40 …

F3 | =LN(E3/E2)

	A	B	C	D	E	F
1	*Data*	*Open*	*Max*	*Min*	*Close*	*RendGiorn%*
2	01/03/2023	7279,34	7327,29	7219,4	7234,25	
3	02/03/2023	7176,41	7286,24	7169,66	7284,22	0,688%
4	03/03/2023	7313,48	7358,04	7308,15	7348,12	0,873%
5	06/03/2023	7385,75	7401,15	7349,98	7373,21	0,341%
6	07/03/2023	7355,87	7398,03	7336,2	7339,27	-0,461%
7	08/03/2023	7305,92	7346,62	7305,92	7324,76	-0,198%
8	09/03/2023	7317,43	7333,22	7274,05	7315,88	-0,121%
9	10/03/2023	7193,37	7256,48	7166,89	7220,67	-1,310%
10	13/03/2023	7211,44	7211,44	6979,55	7011,5	-2,940%
11	14/03/2023	7029,22	7162,57	6989,96	7141,57	1,838%
12	15/03/2023	7123,2	7123,2	6861,63	6885,71	-3,648%

Figura 9

e, infine, valor medio e deviazione standard per il DAX:

B113 | =DEV.ST.C(F3:F110)

	A	B	C	D	E	F
100	20/07/2023	16059,22	16211,43	16050,98	16204,22	0,590%
101	21/07/2023	16125,21	16181,34	16103,48	16177,22	-0,167%
102	24/07/2023	16126,71	16208,76	16121,27	16190,95	0,085%
103	25/07/2023	16169,75	16225,89	16135,6	16211,59	0,127%
104	26/07/2023	16183,7	16212,91	16000,04	16131,46	-0,496%
105	27/07/2023	16162,16	16408,8	16131,64	16406,03	1,688%
106	28/07/2023	16356,38	16490,13	16336,42	16469,75	0,388%
107	31/07/2023	16434,66	16528,97	16427,47	16446,83	-0,139%
108	01/08/2023	16414,79	16430,66	16240,4	16240,4	-1,263%
109	02/08/2023	16027,65	16140,76	15955,31	16020,02	-1,366%
110	03/08/2023	15879,03	15920,32	15807,85	15893,38	-0,794%
111						
112	μ =	0,035%				
113	σ =	0,9289%				

Figura 10

e per il CAC 40:

B112 | =MEDIA(F3:F110)

	A	B	C	D	E	F
100	20/07/2023	7302,22	7391,45	7301,12	7384,91	0,788%
101	21/07/2023	7389,51	7433,31	7379,62	7432,77	0,646%
102	24/07/2023	7405,66	7435,93	7390,82	7427,31	-0,073%
103	25/07/2023	7449,94	7450,37	7401,83	7415,45	-0,160%
104	26/07/2023	7363,54	7369,07	7251,02	7315,07	-1,363%
105	27/07/2023	7358,66	7477,11	7340,03	7465,24	2,032%
106	28/07/2023	7449,2	7498,94	7416,2	7476,47	0,150%
107	31/07/2023	7473,12	7526,05	7464,65	7497,78	0,285%
108	01/08/2023	7478,1	7499,53	7403,16	7406,08	-1,231%
109	02/08/2023	7312,91	7377,01	7287,04	7312,84	-1,267%
110	03/08/2023	7256,06	7271,83	7213,87	7260,53	-0,718%
111						
112	μ =	0,003%				
113	σ =	0,9998%				

Figura 11

Si osservino le formule (nella barra delle formule di Excel), che sono state impiegate per il calcolo dei rendimenti giornalieri logaritmici, del valor medio, μ, e della deviazione standard, σ.

Ed ora, siamo in discesa. Procediamo allora con il calcolo dei corrispondenti rendimenti giornalieri standard.

Il valore standardizzato di -1,37% è pari a:

$$z_1 = \frac{-1{,}37\% - 0{,}035\%}{0{,}93\%} = -1{,}51$$

mentre, quello relativo a -1,27% è pari a:

$$z_2 = \frac{-1{,}27\% - 0{,}003\%}{1\%} = -1{,}27$$

Come dovevamo attenderci, entrambi i valori standardizzati sono negativi. Quindi, vuol dire che si trovano alla sinistra del loro valor medio. Il rendimento giornaliero del DAX, però, è sicuramente peggiore (relativamente): si trova, infatti, ad 1,51 deviazioni standard dal proprio valor medio. Mentre, quello dell'indice francese, dista dal suo valor medio 1,27 deviazioni standard.

Anticipo subito una possibile critica. Ma come possiamo affermare che i rendimenti giornalieri logaritmici delle due attività finanziarie si distribuiscono normalmente? A questo stadio delle conoscenze non lo possiamo affermare. Per il momento, fidiamoci che sia così. Poi, più avanti, cercheremo di capire quali siano gli strumenti che ci consentono di asseverare una tale affermazione[6].

Intervalli … speciali!

Vi sono alcuni intervalli che ricorrono spesso e che, più avanti, ci torneranno utili. Torniamo alla figura 1. Chiediamoci, qual è la probabilità che la variabile z sia compresa nell'intervallo:

$$\mu - \sigma < z < \mu + \sigma$$

e, ancora una volta, cerchiamo di rispondere a tale domanda consultando la tavola di Sheppard. Provate a farlo e, se la consultazione è corretta, dobbiamo convenire che tale probabilità è pari al 68,268%.

E se invece l'intervallo fosse di due deviazioni standard prima e dopo la media? Ovvero:

$$\mu - 2\sigma < z < \mu + 2\sigma$$

In questo caso si avrebbe il 95,45%. E, infine, se l'intervallo fosse di tre deviazioni standard prima e dopo la media? Ovvero:

$$\mu - 3\sigma < z < \mu + 3\sigma$$

In questo caso la probabilità ammonterebbe al 99,73%: praticamente quasi l'evento certo!

Ora, e si può dimostrare, queste conclusioni non valgono solo nel caso di una distribuzione normale standard, ma valgono per qualunque distribuzione, purché normale. Si tratta di regole abbastanza semplici da applicare ma di grande impatto: in sostanza si può affermare che in ogni caso, qualunque sia la popolazione (o il campione) che stiamo analizzando, se si distribuisce normalmente, la probabilità che la variabile assuma valori contenuti in un intervallo ampio due deviazioni standard e centrato attorno al valor medio è del 68,27% circa. E, analoghe affermazioni, per gli altri due intervalli già richiamati.

[6] In letteratura, fra gli altri, vi sono i test di Shapiro-Wilk, per campioni poco numerosi, o di Kolmogorov-Smirnov, per campioni maggiormente numerosi.

Conclusioni

Abbiamo cominciato a giocare con la distribuzione normale ed i parametri che la definiscono univocamente: valor medio e deviazione standard. Abbiamo cercato di comprendere la potenza della distribuzione normale standard mostrando alcune delle analisi che con essa si possono svolgere. Comincia a delinearsi, sempre più, il ruolo svolto dalla volatilità e di come, in statistica, essa venga misurata con la deviazione standard. Ma gli esempi fatti fino a questo momento hanno riguardato solo la volatilità storica. E la volatilità implicita? Come si lega a tutto ciò? Avrei voluto scrivere di essa già in questa quarta parte (come, peraltro, avevo promesso nella parte precedente) ma, giunto a questo punto, mi rendo conto che la quantità di conoscenze che vi sto proponendo è già abbastanza rilevante. Dal prossimo, però, sarà mia cura partire proprio da lì.

Buon studio!