La volatilità (parte quinta)

Premessa

In questo articolo cerchiamo di comprendere il significato della volatilità implicita, soprattutto da un punto di vista strettamente pratico, mostrando esempi tratti dalla realtà del trading.

Nel corso dell'articolo, via via che andremo a dipanare i concetti trattati, faremo anche un breve excursus storico per ricordare gli antesignani della finanza quantitativa che hanno reso possibile il raggiungimento di risultati così importanti.

Cercheremo di comprendere il legame tra la volatilità implicita e la radice quadrata del tempo e, soprattutto, le implicazioni pratiche che tale legame comporta in termini di… prevedibilità dei prezzi di borsa.

Risponderemo ad una domanda che, sovente, mi viene posta circa il perché, call e put dello stesso strike e della stessa scadenza, devono possedere il medesimo livello di volatilità implicita. Per far ciò ci avvarremo della nota formula *put call parity* che, oltre che in tale circostanza, utilizzeremo massicciamente anche in seguito.

L'articolo si chiude con l'enucleazione delle ragioni che conducono alla presenza del *volatility smile*, diversamente da come atteso dal modello B&S.

La volatilità implicita

Credo sia chiaro, dopo quanto riportato nei precedenti articoli, che la volatilità, matematicamente parlando, altro non è che la deviazione standard di un campione (o di una popolazione) di individui[1] che si distribuiscono normalmente. Fino a questo momento, però, gli esempi che sono stati proposti hanno tutti riguardato la volatilità storica. Ma allora, che cos'è la volatilità implicita e in che cosa si differenzia dalla volatilità storica?

Il market maker e la formula di B&S

Quando valutiamo il prezzo di un'opzione e, per far ciò, utilizziamo il modello di Black and Scholes (B&S), dobbiamo conoscere, di quell'opzione: lo strike, il prezzo del sottostante, la data di scadenza, il tasso privo di rischio, il tipo di opzione (call o put), il dividendo (se il sottostante è un titolo azionario o un paniere di titoli azionari che staccano dividendi) e la volatilità implicita. Si tratta di sei parametri (non considerando il tipo) tutti noti tranne uno: la volatilità implicita.

Quando apriamo il book di negoziazione dell'opzione riportata in figura, possiamo osservare due prezzi il bid e l'ask (o, denaro e lettera). Il bid rappresenta il prezzo che ci verrà praticato qualora noi intendessimo vendere tale opzione. Mentre l'ask rappresenta ciò che dobbiamo pagare per sostenere l'acquisto dell'opzione medesima. Ma chi espone tali prezzi? È il market maker, che si assume il compito di garantire, in modo continuativo per tutta la durata della sessione di contrattazione, la negoziabilità di un determinato

[1] Nel nostro caso gli individui sono i rendimenti giornalieri (che è il time frame più studiato) logaritmici dell'attività finanziaria in esame.

titolo. Una figura istituzionale che, per contratto, deve essere sempre pronta a garantire tutte le possibili transazioni che gli altri partecipanti al mercato intendono effettuare su quello strumento finanziario[2].

Naturalmente, a fronte di tali obblighi, al market maker viene riconosciuto, per ogni transazione finanziaria, il guadagno costituito dalla differenza tra il prezzo ask ed il prezzo bid (o, più correttamente, la semidifferenza).

Torniamo, ora, ai prezzi che il market maker espone nel book di negoziazione di un'opzione finanziaria. E, per semplicità, consideriamo la media aritmetica di tali prezzi (ciò che in genere viene indicato con il termine mid):

$$mid = \frac{ask + bid}{2}$$

Se questo prezzo è il risultato dell'applicazione del modello B&S, evidentemente, il market maker, oltre a conoscere i parametri noti a tutti, dovrà conoscere anche quello non noto: la volatilità implicita. Ora, però, le cose non stanno esattamente così: non vorrei che qualcuno pensasse alla volatilità implicita come a qualcosa di misterioso, e ben nascosto, che solo il market maker è in grado di scovare! Più semplicemente, egli stabilisce quale valore dovrà assumere la volatilità implicita da assegnare a quell'opzione, avente quel determinato strike, quella scadenza, in quel preciso momento della sessione di contrattazione caratterizzata dal valore assunto, in tale momento, dal sottostante. In sostanza, sulla base di quanto sinora affermato sulla volatilità, e sapendo che questa è una deviazione standard e costituisce uno dei due parametri che definiscono una gaussiana - nel nostro caso la distribuzione dei rendimenti logaritmici di un certo sottostante - allora possiamo affermare, senza ombra di smentita, che il market maker, quando assegna ad un'opzione una certa volatilità implicita, sta ipotizzando una certa distribuzione dei rendimenti logaritmici dell'attività finanziaria sottostante tale opzione.

Figura 1 – Che cosa proporrà, il market maker, per la sessione corrente? [3]

[2] Senza entrare nello specifico, comunque, il contratto che obbliga il market maker ad esporre proposte in denaro ed in lettera stabilisce limiti di volume e di intervalli temporali di presenza sul mercato.

[3] Sulla base dell'indice di curtosi, una distribuzione gaussiana può essere normocurtica (o mesocurtica) quando gli individui sono normalmente concentrati attorno alla media; leptocurtica, quando sono molto concentrati attorno alla media; platicurtica, quando sono poco concentrati attorno alla media.

Se, per quella giornata, si aspetta grandi escursioni del sottostante, allora assegnerà un elevato valore di volatilità implicita; se, invece, le escursioni attese sono piccole, allora assegnerà alle opzioni un piccolo valore di volatilità implicita. Il risultato finale, per il trader in opzioni, è che nel primo caso queste si riveleranno più costose che nel secondo.

Una buona notizia

Abbiamo detto che una distribuzione normale (o gaussiana) è univocamente definita da due soli parametri: il valor medio e la deviazione standard (μ e σ). Tra le ipotesi che soggiacciono al modello B&S vi è quella per cui il valor medio dei rendimenti logaritmici di un'attività finanziaria è nullo. In altre parole, se, per tale attività finanziaria, andiamo ad eseguire la media aritmetica di una serie di rendimenti giornalieri, ci dobbiamo aspettare che questa si attesti attorno allo zero. Naturalmente ciò è tanto più vero quanto maggiore è il numero di tali rendimenti. O, in altri termini, quanto maggiore è l'intervallo temporale che stiamo considerando. Ma perché questa sarebbe una *buona notizia*? Perché questo significa che per definire la curva gaussiana che stabilisce come si distribuiranno i rendimenti logaritmici di tale attività finanziaria, è sufficiente conoscere il solo parametro della volatilità implicita. Già da questa affermazione, dovremmo cominciare a comprendere quanto, per un opzionista, sia importante la volatilità (e siamo solo agli inizi)!

Deviazione standard annualizzata

Ed ora cerchiamo di fare un passo avanti. Se conosciamo il prezzo di un'opzione possiamo, per via inversa, ricavare il valore della volatilità implicita che il market maker ha assegnato a tale opzione. Proviamo a farlo per l'opzione indicata in figura 2.

Figura 2 – Opzione Call, strike 15.500, scadenza settembre 2023 (valori del 22/08/23 ore 16:55 Circa)

Apriamo il nostro calcolatore, imputiamo tutti i dati e …

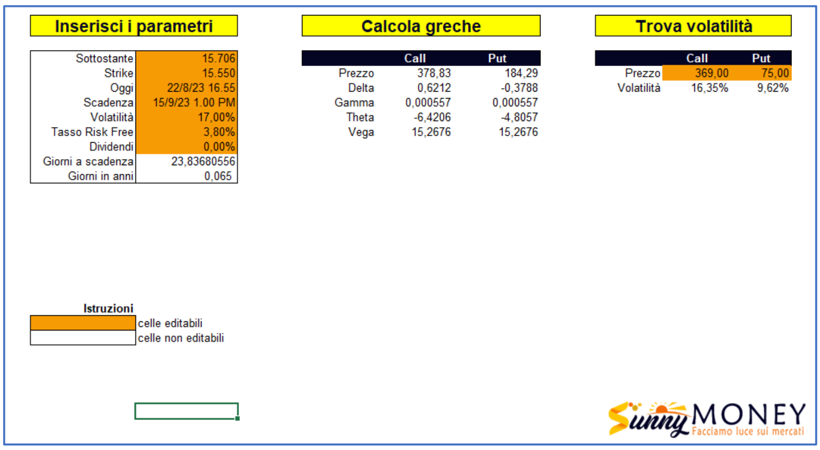


Figura 1

… scopriamo che la volatilità implicita vale 16,35%. Ma che cosa significa? Dobbiamo innanzitutto dire che questo valore è annualizzato. Nel senso che si suppone che la nostra attività finanziaria mostri, nell'arco temporale di un anno, circa 250[4] rendimenti logaritmici giornalieri che si distribuiscono gaussianamente con deviazione standard pari al 16,35%. Ora, vi ricordate quanto affermato nel paragrafo "Intervalli … speciali!" della parte precedente (la parte quarta)? Applichiamo subito, allora, quanto riportato in quel paragrafo. Vi è la probabilità del 68% circa che il Dax (l'attività finanziaria in esame nel nostro esempio), in un anno, compia un'escursione del 16,35%, verso l'alto o verso il basso, a partire dal valore assunto in quel giorno. Vediamolo in numeri. Oggi, 22 agosto 2023, con lo spot a 15.706, dobbiamo aspettarci che il Dax possa oscillare, da qui al 22 agosto del 2024, tra 13.138 e 18274 circa, con probabilità del 68% circa.

Provate, per esercizio, a calcolare gli estremi di variazione, del Dax, qualora si voglia considerare un intervallo di due deviazioni standard verso il basso e due deviazioni standard verso l'alto (5.136-20.842).

E per previsioni giornaliere?

E se volessimo sfruttare quanto appena appreso per effettuare, in luogo di previsioni su base annua, previsioni giornaliere? Ci servirebbe una volatilità non più annualizzata ma su base giornaliera. E come si fa ad ottenere questa "nuova" volatilità? Si potrebbe pensare di dividere la volatilità annualizzata per il numero di giorni di borsa aperta in un anno. Ma, purtroppo, le cose non sono così semplici! Soprattutto nel mondo delle opzioni, dove la non linearità impera in ogni dove.

Allora, partiamo dal risultato finale:

$$\sigma_t = \sigma\sqrt{t} \qquad \textbf{[1]}$$

che dobbiamo leggere in questo modo:

la volatilità del prezzo di un'attività finanziaria in t periodi di tempo è pari alla sua volatilità nel periodo t, moltiplicata per la radice quadrata di t. In sostanza la volatilità non cresce linearmente al crescere del tempo ma in ragione di $\sqrt{t}$. Per avere una volatilità doppia, dobbiamo attendere il trascorrere di quattro periodi di tempo; e per una volatilità tripla, ben nove periodi di tempo. E così via. Quindi, per fare un esempio, se volessi sapere il valore della volatilità ad una settimana, conoscendo quella giornaliera, dovrei operare così:

$$\sigma_{settimanale} = \sigma_{giornaliera} \cdot \sqrt{5}$$

dal momento che in una settimana vi sono 5 giorni lavorativi. Ma noi non abbiamo la volatilità giornaliera; anzi, è proprio la variabile che vogliamo conoscere. E allora? Allora si ragiona in termini di annualità. Ovvero:

$$\sigma_{annuale} = \sigma_{giornaliera} \cdot \sqrt{252}$$

dove abbiamo indicato con 252 il numero (medio) di giorni di borsa aperta in un anno. E quindi, invertendo quest'ultima equazione:

$$\sigma_{giornaliera} = \frac{\sigma_{annuale}}{\sqrt{252}} = \frac{\sigma_{annuale}}{15{,}87}$$

Pertanto, per tornare al nostro esempio, quale escursione giornaliera ci possiamo attendere se la volatilità implicita annuale che abbiamo misurato, a partire dai prezzi esposti dal market maker, è del 16,35%? Presto fatto:

[4] Che corrisponde al numero medio di sessioni di negoziazioni giornaliere in un anno. Alcuni utilizzano 252.

$$\sigma_{giornaliera} = \frac{\sigma_{annuale}}{15{,}87} = \frac{16{,}35\%}{15{,}87} = 1{,}03\%$$

Avremo, quindi, con probabilità del 68% circa, che il Dax, in un giorno, potrà compiere un'escursione del 1,03%, verso l'alto o verso il basso, a partire dal valore di riferimento. Con lo spot a 15.706, dobbiamo aspettarci che il Dax possa oscillare, in giornata, tra 15.544 e 15868 (circa).

Permettetemi, ora, un piccolo appunto su quel numeretto, 252, quasi magico! Mi è capitato diverse volte, in vari forum, di partecipare a lunghe (ed estenuanti) discussioni su quale debba essere il giusto numero da inserire in quella formula. C'è chi propone 254, chi 255, chi ogni nuovo anno, note le festività, si calcola il numero effettivo di giorni di borsa aperta ed usa quel numero. Chi, invece, fa lo stesso lavoro ma sui cinque anni precedenti e poi ne ricava una media. Come spesso mi è occorso di affermare, si tratta di questioni di "lana caprina". Per due ragioni. La prima è che siamo opzionisti e non scalper alla ricerca del livello (di supporto o di resistenza) espresso con precisione micrometrica. La seconda è che, oggettivamente, la differenza che si ottiene, cambiando 252 in una delle altre innumerevoli proposte, è davvero poco significativa. Provate, per puro esercizio. È talmente poco significativa che, spesso, quando voglio fare un calcolo rapido, io personalmente uso 256! Perché? Ma è semplice: la radice quadrata di 256 è esattamente 16! E, nell'esempio che stiamo portando vanti, con 16 avrei trovato:

$$\sigma_{giornaliera} = \frac{16{,}35\%}{16} = 1{,}02\%$$

che mi conduce ad estremi di variazione giornaliera che valgono: 15546 - 15.866 (due punti di differenza rispetto al calcolo esatto).
Spero di essere stato chiaro.

Orbene, avevo scritto "*… partiamo dal risultato finale …*", intendendo che quella equazione, la [1], andrebbe giustificata. Oppure dobbiamo prenderla per buona, così, come ci viene data? In effetti, in rete, non è facile trovare una giustificazione teorica di tale formula. E, mi sembra già di sentire qualche commento, "tutto sommato, se funziona, io la uso e punto. Cosa mi interessa sapere da dove giunge?".

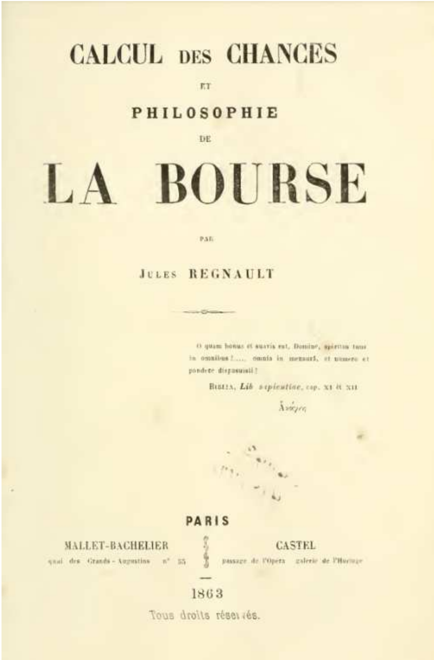
È vero, anche questa è una filosofia di vita. Io personalmente, però – e sicuramente, chi mi segue da qualche tempo, avrà imparato a conoscermi un po' – cerco sempre di andare a fondo nelle cose, soprattutto quando si parla di formule matematiche. Le formule sono la sintesi estrema di un modello che utilizziamo per spiegare un aspetto della realtà. Ma un modello, come tutti i modelli, ha sempre dei limiti. E, se non si conoscono tali limiti, si rischia di fare danni, usando quel modello anche in circostanze in cui non è impiegabile perché fornisce risultati palesemente errati. Ma questa è un'altra storia. E, se ci sarà modo e tempo, affronteremo anche la questione dei modelli matematici (tanto cari alla fisica, all'ingegneria, alla finanza, ma anche alle scienze sociali).

Alcuni riferimenti storici

Ciò che a breve vi riporterò fa parte di una serie di ricerche che ho effettuato in questi anni per comprendere come si è riusciti a giungere alla formulazione del modello B&S e quali sono stati, se ve ne sono stati, gli antesignani che con le loro idee hanno consentito il raggiungimento di risultati così importanti.

Naturalmente, per questioni di spazio, sarò il più possibile breve e succinto, fornendovi solo i risultati di queste mie ricerche.

Una delle prime menti che suggerì un modello che potesse spiegare l'andamento dei prezzi di borsa fu il francese ***Jules Augustin Frédéric Regnault*** (1834-1894) che nel 1863 pubblica *Calcul des Chances et philosophie de la Bourse*. Regnault, gran parte delle cui idee si rifacevano agli studi di Jakob Bernoulli, nella sua pubblicazione sostiene che i prezzi di un'attività finanziaria non possono essere prevedibili in quanto seguono un cammino casuale. L'unica certezza, proseguiva nei suoi scritti, è che lo speculatore deve pagare una commissione al broker e, pertanto, dopo un numero più o meno elevato di transazioni il suo capitale andrà inesorabilmente a zero!



CALCUL DES CHANCES

ET

PHILOSOPHIE

DE

LA BOURSE

PAR

JULES REGNAULT

O quam bonus et suavis est, Domine, spiritus tuus in omnibus!..... omnia in mensurâ, et numero et pondere disposuisti!

BIBLIA, *Lib. sapientiae*, cap. XI et XII

PARIS

MALLET-BACHELIER
quai des Grands-Augustins n° 55

CASTEL
passage de l'Opéra galerie de l'Horloge

1863

Tous droits réservés.

Figura 2 – Copia detenuta presso la biblioteca dell'Università di Ottawa, in Canada

In una parte del volume, inoltre, Regnault esibisce una serie di calcoli che hanno lo scopo di determinare quanto tempo, lo speculatore, impiegherà per perdere tutto il suo denaro.

Ora, ed è più che lecito, qualcuno si chiederà che mestiere facesse questo signore. Ebbene, era agente di cambio alla borsa di Parigi! A parte, quindi, la dotazione tecnico-matematica che esibisce nel suo volume, osservando la quale sicuramente si sarebbe portati ad affermare che costui, sicuramente, era un buon teorico della materia, c'è da dire che anche da un punto di vista – per così dire – pratico, sicuramente la materia la conosceva bene!

Credo sia un volume che, oggi, nelle librerie specializzate sul tema della finanza, sicuramente stonerebbe e non si troverebbe in buona compagnia, dal momento che la maggior parte dei libri dedicati alla borsa ed al trading, chissà come mai, promettono guadagni a dir poco mirabolanti!

Ora, aldilà di cosa e quanto si potrebbe scrivere di questo signore (che, per la cronaca, dal 1881 decide di vivere di rendita dopo aver accumulato un patrimonio di sicuro rilievo – d'altronde, lui, le commissioni non le pagava, ma le incassava![5]) ciò che a mio avviso lo rende degno di essere ricordato come uno dei primi studiosi della finanza quantitativa moderna è per quel che scrive a pagina 50 (vedi figura 5, circa a metà, in maiuscolo):

[5] Al momento della sua morte il patrimonio detenuto, riportato ad oggi, era di circa cinque milioni di euro; il 70% di questo patrimonio era investito in titoli di stato francesi con cedola al 3,5%.

— 50 —

temps plus rapprochés, en augmentant pour des temps plus éloignés.

Enfin, si on cherche quel est le rapport qui peut unir ces différents écarts aux différents temps dans lesquels ils se sont produits, on peut constater que pour une période moitié moindre, l'écart diminue, non pas de moitié, mais dans une proportion qui est sensiblement à la première comme 1 est à 1,41; pour une période trois fois moindre, l'écart diminue dans un rapport qui est comme 1 à 1,73, pour une période de temps quatre fois moindre, dans le rapport 1 à 2.

Il existe donc une loi mathématique qui règle les variations et l'écart moyen des cours de la Bourse, et cette loi, qui ne paraît pas avoir jamais été soupçonnée jusqu'à présent, nous la formulons ici pour la première fois :

L'ÉCART DES COURS EST EN RAISON DIRECTE DE LA RACINE CARRÉE DES TEMPS.

De sorte que le spéculateur qui veut se liquider avec des écarts doubles, c'est-à-dire des différences deux fois plus grandes entre ses prix d'achat et de vente, doit attendre *quatre* fois plus longtemps; s'il veut se liquider avec des différences triples, *neuf* fois plus longtemps et ainsi de suite, en multipliant les temps par les carrés des écarts.

Celui qui ne met, par exemple, qu'un jour d'intervalle entre ses liquidations, se liquidera avec un écart *moitié* moindre que celui qui se liquide tous les quatre jours, *trois* fois moindre que celui qui se liquide tous les neuf jours, etc., en divisant les écarts par les racines carrées des temps.

Figura 3

L'ÉCART DES COURS EST EN RAISON DIRECTE DE LA RACINE CARRÉE DES TEMPS: lo scarto dei prezzi è direttamente proporzionale alla radice quadrata dei tempi. In sostanza, proprio la formula [1], che ho indicato a pagina 4: e siamo nel 1863, 110 anni prima della pubblicazione della Black and Scholes!

Un altro personaggio che qui debbo citare, di spessore sicuramente maggiore rispetto a Regnault, è il francese ***Louis Bachelier*** (1870-1946) che, nel 1900, discute alla Sorbona la tesi di dottorato *Théorie de la Spéculation*.

THÉORIE

DE

LA SPÉCULATION,

PAR M. L. BACHELIER.

INTRODUCTION.

Les influences qui déterminent les mouvements de la Bourse sont innombrables, des événements passés, actuels ou même escomptables, ne présentant souvent aucun rapport apparent avec ses variations, se répercutent sur son cours.

A côté des causes en quelque sorte naturelles des variations, interviennent aussi des causes factices : la Bourse agit sur elle-même et le mouvement actuel est fonction, non seulement des mouvements antérieurs, mais aussi de la position de place.

La détermination de ces mouvements se subordonne à un nombre infini de facteurs : il est dès lors impossible d'en espérer la prévision mathématique. Les opinions contradictoires relatives à ces variations se partagent si bien qu'au même instant les acheteurs croient à la hausse et les vendeurs à la baisse.

Le Calcul des probabilités ne pourra sans doute jamais s'appliquer aux mouvements de la cote et la dynamique de la Bourse ne sera jamais une science exacte.

Mais il est possible d'étudier mathématiquement l'état statique du marché à un instant donné, c'est-à-dire d'établir la loi de probabilité des variations de cours qu'admet à cet instant le marché. Si le marché, en effet, ne prévoit pas les mouvements, il les considère comme étant

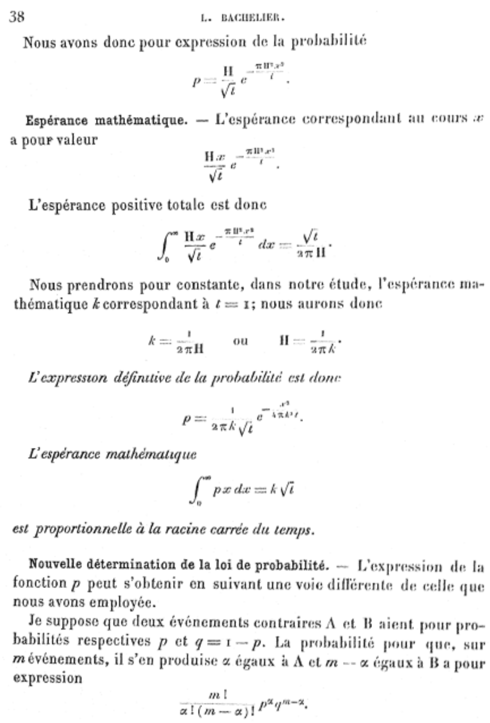
Figura 4

Di Bachelier avremo modo di parlare, in quanto il lavoro svolto in quella tesi è davvero rimarchevole, soprattutto se riferito al tempo della pubblicazione. Notevole, soprattutto per quei tempi, è l'affermazione:

nel momento in cui si effettua un'operazione, sia in acquisto che in vendita, il valore atteso della stessa è nullo

In altre parole, il prezzo a cui viene conclusa l'operazione, non assegna un vantaggio né al compratore e né al venditore. E questa affermazione si riferisce a qualunque operazione finanziaria. Quindi, questo vale anche per noi opzionisti, quando si acquista o si vende sia una call sia una put, il valore atteso di quella negoziazione è nullo!

Vi sono tanti altri passaggi che rendono quella tesi un lavoro davvero eccezionale ma, non è questa la sede per affrontarli. Qui, in modo più attinente al tema che ci siamo proposti di trattare, voglio solo accennare a ciò che si trova a pagina 38, e che ripropongo qui, in figura 7.


38 L. BACHELIER.

Nous avons donc pour expression de la probabilité

$$p = \frac{H}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi H^2 x^2}{t}}.$$

Espérance mathématique. — L'espérance correspondant au cours x a pour valeur

$$\frac{Hx}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi H^2 x^2}{t}}.$$

L'espérance positive totale est donc

$$\int_0^\infty \frac{Hx}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi H^2 x^2}{t}} dx = \frac{\sqrt{t}}{2\pi H}.$$

Nous prendrons pour constante, dans notre étude, l'espérance mathématique k correspondant à $t = 1$; nous aurons donc

$$k = \frac{1}{2\pi H} \quad \text{ou} \quad H = \frac{1}{2\pi k}.$$

L'expression définitive de la probabilité est donc

$$p = \frac{1}{2\pi k \sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4\pi k^2 t}}.$$

L'espérance mathématique

$$\int_0^\infty p x\, dx = k\sqrt{t}$$

est proportionnelle à la racine carrée du temps.

Nouvelle détermination de la loi de probabilité. — L'expression de la fonction p peut s'obtenir en suivant une voie différente de celle que nous avons employée.

Je suppose que deux événements contraires A et B aient pour probabilités respectives p et $q = 1 - p$. La probabilité pour que, sur m événements, il s'en produise α égaux à A et $m - \alpha$ égaux à B a pour expression

$$\frac{m!}{\alpha!(m-\alpha)!} p^\alpha q^{m-\alpha}.$$

Figura 5

Notate l'espressione successiva all'affermazione *L'expression définitive de la probabilité est donc*: a denominatore si può scorgere il prodotto:

$$k \cdot \sqrt{t}$$

E quel k, che Bachelier chiama *amplitude* (ampiezza dei movimenti di mercato) è proprio ciò che oggi noi chiamiamo volatilità.

Queste poche righe non rendono, a Bachelier, il merito che la sua figura scientifica richiede. Ma, in questa sede, mi preoccupa, principalmente, ricordarlo come uno degli antesignani della finanza quantitativa, sicuramente tra i più illustri.

Prima di Black, Scholes e Merton molti altri si erano interessati al problema di come prezzare correttamente le opzioni. Qui vogliamo solo citare i lavori di Sprenkle (1961), di Boness (1964) e, soprattutto, di Samuelson (1965).

Il processo stocastico di Wiener

Una delle conclusioni più importanti a cui la finanza quantitativa giunge, nella seconda metà del novecento, è che i prezzi di un'attività finanziaria sono descrivibili da un processo stocastico. Se si assume, infatti, che i rendimenti logaritmici si distribuiscano secondo una gaussiana, allora i prezzi seguiranno un percorso aleatorio che può essere descritto, matematicamente, da un processo stocastico.

Ora, comprendere appieno un processo stocastico, non è banale. Cercherò, comunque, di renderne l'idea con un esempio. Immaginate di muovere una pedina della dama su una scacchiera di grandi dimensioni, diciamo 51x51 (quindi non quella tradizionale, 8x8). All'istante zero, l'istante iniziale, ponetela sulla prima riga, in basso, in posizione centrale (colonna 26). Questa, potrà muoversi solo sulle diagonali. Il movimento non è fluido e continuo, ma avviene a scatto, ogni due secondi. La regola, che governa il movimento della pedina, è la seguente: ogni due secondi si lancia una moneta: se esce testa, la pedina si muove verso destra e, se esce croce, la pedina si muove verso sinistra. Sempre in diagonale. Immaginate di proseguire per un buon numero di lanci, diciamo una decina. Alla fine, avrete ottenuto un percorso. Se ora ripetete l'esperimento, quasi certamente otterrete un percorso differente[6].

Il movimento della pedina dipende da due variabili: una deterministica, il tempo e l'altra, l'esito del lancio della moneta, che è una variabile casuale.

Ecco, questo è sicuramente un buon esempio di processo stocastico.

Il ***processo stocastico di Wiener*** è un processo gaussiano a tempo continuo e con incrementi indipendenti. Questa è la definizione. Ma cosa significa? Torniamo alla pedina del nostro esempio e facciamo due modifiche. La prima è relativa al tempo: non più ogni due secondi ma ogni istante (tempo continuo), la seconda è relativa al dominio della variabile casuale. Nel caso della pedina, i possibili esiti erano solo due, testa o croce. E, conseguentemente, due soli possibili movimenti. Qui, invece, gli esiti sono infiniti. Ed altrettanto infiniti dovranno essere i possibili movimenti. Immaginiamo che la pedina possa muoversi in un arco di possibili direzioni ampio 180°. Misuriamo l'angolo della direzione di ogni movimento ponendo la semiretta di riferimento in verticale. Quindi, per un angolo di zero gradi, la pedina si muove verso l'alto in verticale. Quando si muove a destra, si muoverà con un angolo di -90° e, quando si muove a sinistra, si muoverà con un angolo +90°. L'esito dell'estrazione è il valore di una gaussiana con media zero e varianza pari a t (tempo). I valori più probabili, come sappiamo, sono quelli attorno alla media, cioè attorno a zero. Quando viene estratto uno di questi valori, la pedina si muoverà verso l'alto con un angolo vicino a zero gradi, leggermente verso destra o leggermente verso sinistra. Con minore probabilità, invece, avremo valori distanti dalla media e che imporranno, alla pedina, di muoversi con angoli vicino a -90° (verso destra) o +90°, verso sinistra. Anche qui, se ripetiamo l'esperimento n volte, otterremo n percorsi differenti. Questo è il processo di Wiener.

Ora, se la varianza della distribuzione di Gauss che governa un processo di Wiener è pari a t, allora la deviazione standard, che ne è la radice quadrata, sarà pari a $\sqrt{t}$. Ecco, proprio quest'ultima affermazione è l'argomentazione più rigorosa che si può fornire per sostenere e giustificare la formula [1].

Ancor prima di Black, Scholes e Merton, Samuelson (premio Nobel nel 1970, e che abbiamo già citato) e Fama (premio Nobel nel 2013) avevano usato il processo stocastico di Wiener per descrivere l'andamento dei prezzi di un'attività finanziaria.

---

[6] Su 10 lanci, la probabilità di ottenere lo stesso identico percorso è inferiore allo 0,1%. Se aumentiamo a 20, il numero dei lanci, questa probabilità diviene inferiore ad 1 su un milione!

Volatility Smile: la volatilità ci ride in faccia?

Nel 1973, anno della pubblicazione dell'articolo di Black e Scholes, possiamo dire che si chiude un percorso, quasi centenario, sulla ricerca della formula … ("perfetta") per la valutazione delle opzioni finanziarie. Un cammino lungo il quale molte delle menti più brillanti della matematica dell'Ottocento e del Novecento hanno dato, ciascuna nella sua parte, un contributo fondamentale.

È bizzarro che nello stesso anno, il 26 aprile, si apre a Chicago la prima borsa che ha lo scopo di quotare opzioni standardizzate su azioni[7].

Il 1973, come si è scritto, chiude un periodo ma ne apre anche un altro: quello della verifica empirica della formula di Black e Scholes e, come si suol dire, "dei test a mercato".

Tra queste verifiche si è subito notato che quando il prezzo di esercizio è molto distante dal prezzo del sottostante (opzioni OTM o ITM) le valutazioni espresse dalla formula – quindi teoriche – mostrano valori abbastanza diversi da quelli espressi dal mercato. Ora, come spesso si dice, "il mercato ha sempre ragione". E ciò porta a concludere che nella formula ci sia qualcosa che non va, oppure, che una o più ipotesi sulle quali si regge la formula, non siano corrette. Tra queste ipotesi vi è quella che stabilisce che la volatilità implicita, fissata una determinata scadenza, debba essere costante per ogni strike. Ma questa ipotesi, osservando il mercato, non è verificata.

Usando i fogli Excel che ho già avuto modo di mettere a disposizione, possiamo ricavare, noto il prezzo delle opzioni, call e put di ciascun strike, la volatilità implicita che il modello assegna ad ognuno di questi[8]. Successivamente, riportiamo poi tali valori in un grafico dove, sull'asse delle ascisse, poniamo il sottostante (scandito strike per strike) e, su quello delle ordinate, il valore della volatilità implicita espressa per ognuno degli strike.

Per la scadenza mensile prossima, al momento in cui è redatto l'articolo, si trova il grafico di figura 8.

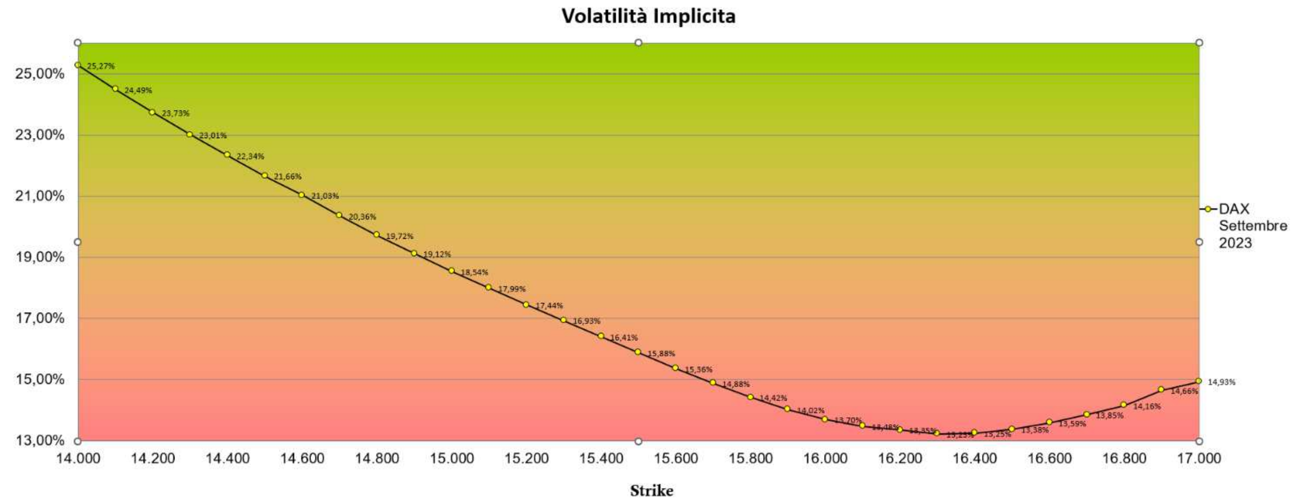


Figura 6

Nel momento della rilevazione, 25/08/2023 ore 11:50 circa, lo spot segna 15.685 circa. Lo strike ATM (15.700) mostra una volatilità implicita di 14,88%. E, come si nota, variando lo strike della chain da 14.000 a 17.000, la volatilità implicita assume valori che vanno da un minimo di 13,23% ad un massimo di 25,27%. In letteratura questa curva è denominata "volatility smile" o sorriso della volatilità. Osservandola, infatti, sembra esprimere un sorriso.

---

[7] Si tratta del CBOE, Chicago Board Option Exchange.

[8] Per ogni strike, la volatilità implicita della call eguaglia quella della put, come si vedrà a breve

Prima di proseguire con le nostre considerazioni, colgo l'occasione per rispondere ad una delle domande che più frequentemente mi vengono poste.

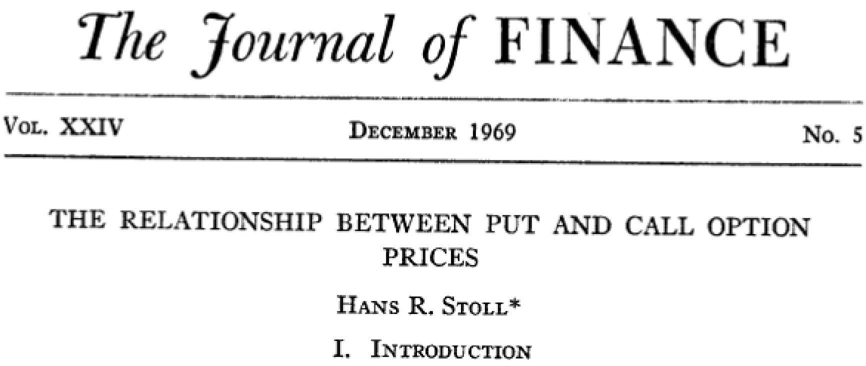
Perché, dato un determinato strike, la call e la put associate al medesimo devono avere la stessa volatilità implicita?

Perché, se così non fosse, vi sarebbe un'opportunità di arbitraggio priva di rischio.

E come mai? Per comprendere bene quanto affermato occorre richiamare una delle formule che viene spesso usata nell'ambito della finanza quantitativa: la *put call parity*.

La put call parity (PCP)

Questa formula è dovuta all'economista H. R. Stoll e compare per la prima volta nel dicembre del 1969, nell'articolo *The Relationship between put and call option prices*, pubblicato su The Journal of Finance.



The Journal of FINANCE

Vol. XXIV　　December 1969　　No. 5

THE RELATIONSHIP BETWEEN PUT AND CALL OPTION PRICES

Hans R. Stoll*

I. Introduction

Figura 7

Sono a conoscenza di altri riferimenti storici che, addirittura, risalirebbero al medioevo. Ma, al momento, non essendo ragionevolmente certo delle fonti, non ve ne parlerò. Torniamo, invece, alla formula, perché riveste un'importanza fondamentale nella finanza quantitativa e, nello specifico che più ci riguarda da vicino, nel campo delle opzioni.

Eccola:

$$c + K \cdot e^{-rT} = p + S_0$$

dove è stata utilizzata la simbologia internazionale (che più volte abbiamo già incontrato) che, per i più smemorati, rammento qui:

$$\begin{cases} c \text{ e } p \text{ sono i prezzi (o premi) di una call e di una put europee} \\ K \text{ è il prezzo di esercizio di tali opzioni} \\ S_0 \text{ è il valore del sottostante, riferito a tali opzioni, all'istante iniziale} \\ r \text{ è il tasso di interesse privo di rischio} \\ T \text{ è il tempo di vita residuo, annualizzato, dei contratti delle opzioni} \\ S_T \text{ è il valore del sottostante alla scadenza delle opzioni} \end{cases}$$

I due lati dell'equazione possono essere visti come due portafogli così costituiti. Il lato sinistro, che chiameremo *portafoglio A*, detiene una call più un importo in denaro pari a $K \cdot e^{-rT}$. Il lato destro, che chiameremo *portafoglio B*, detiene una put più un'azione il cui valore è S_0.

Alla scadenza delle opzioni entrambi i portafogli valgono:

$$\max(S_T, K)$$

Cerchiamo di capirne la ragione. Prendiamo in considerazione il portafoglio A. Se $S_T > K$, L'opzione call scade ITM ed il suo valore sarà $S_T - K$. Nel frattempo, l'importo in denaro è divenuto pari a K. Pertanto, complessivamente, il valore del portafoglio A sarà divenuto, a scadenza:

$$S_T - K + K = S_T$$

Ora, sempre nell'ipotesi $S_T > K$, vediamo cosa accade al portafoglio B. L'opzione put scade OTM, pertanto senza valore. L'azione, che inizialmente valeva S_0, vale ora S_T. Pertanto, il valore del portafoglio B sarà divenuto, a scadenza:

$$0 + S_T = S_T$$

I due portafogli, quindi, nel caso esaminato, si equivalgono.

Ed ora consideriamo il caso alternativo: $S_T < K$. Per il portafoglio A avremo che l'opzione call viene abbandonata, perché priva di valore. E l'importo in denaro, ancora una volta, è divenuto pari a K. Il valore di tale portafoglio sarà allora:

$$0 + K = K$$

Per il portafoglio B avremo che l'opzione put scade ITM con valore $K - S_T$. E l'azione, alla data di scadenza dei contratti di opzione, varrà necessariamente quanto vale il sottostante a tale data: S_T. Il valore di tale portafoglio sarà allora:

$$K - S_T + S_T = K$$

Ed anche in questo caso i due portafoglio mostrano lo stesso valore. Abbiamo quindi dimostrato che i due portafogli, a scadenza, sono equivalenti e valgono: $\max(S_T, K)$.

Ma se lo sono a scadenza, devono esserlo lungo tutto l'arco di vita delle opzioni. Diversamente si avrebbe un'opportunità di arbitraggio priva di rischio. Se, infatti, in un dato istante, il portafoglio A avesse un valore maggiore del portafoglio B, basterebbe vendere il portafoglio sopravvalutato (quindi A) ed acquistare quello sottovalutato (cioè B). Vediamo quest'ultima affermazione con un esempio.

Il 24 agosto, 2023, alle ore 11:25 circa, col sottostante (Dax) a 15.827,3, apro il book di negoziazione delle opzioni call e put relative allo strike 15.800. Per la call leggo un prezzo di 639,5 e, per la put, il premio indicato dal market maker è di 466. Il tasso privo di rischio, r, è del 3%. E il tempo a scadenza (che, ricordo, va annualizzato) è pari a 0,309 circa.

Proviamo ad applicare la PCP. Al primo membro abbiamo:

$$c + K \cdot e^{-rT} = 639{,}5 + 15.800 \cdot e^{-0{,}03*0{,}309} = 639{,}5 + 15.800 \cdot 0{,}991 = 16.294$$

ed al secondo:

$$p + S_0 = 466 + 15827{,}3 = 16293{,}3$$

che, sostanzialmente, si equivalgono.

Ora, provate ad immaginare se, di tutti questi parametri, solo la put variasse portandosi a 486. Avremmo che il lato destro diverrebbe sottovalutato rispetto a quello sinistro. Infatti:

$$c + K \cdot e^{-rT} = 639{,}5 + 15.800 \cdot 0{,}991 = 16.294$$

$$p + S_0 = 486 + 15827{,}3 = 16313{,}3$$

Si procederebbe, pertanto, con la vendita della put e del sottostante ed il contemporaneo acquisto della call. Questa operazione andrebbe a generare un immediato flusso di cassa pari a:

$$486 + 15827{,}3 - 639{,}5 = 15.673{,}8$$

che verrà investito per un periodo di tempo pari alla durata dei contratti di opzione, al tasso privo di rischio. Al termine di tale periodo avremo ottenuto, complessivamente:

$$15.673{,}8 \cdot e^{rT} = 15.673{,}8 \cdot e^{0{,}03*0{,}309} = 15.819{,}8$$

Ed ora vediamo quel che succede a scadenza. Se il sottostante è maggiore dello strike (15.800) la put scade senza valore e la call viene esercitata. Essendo detentori dell'opzione call, la nostra controparte ci dovrà vendere il sottostante al valore di strike pervenendo, in tal modo, al profitto di:

$$15.819{,}8 - 15.800 = 19{,}8$$

Se, invece, il sottostante è minore dello strike, la put verrà esercitata e la call scadrà senza valore. Ed anche in questo caso dovremmo acquistare il sottostante al prezzo di strike ottenendo, lo stesso profitto:

$$15.819{,}8 - 15.800 = 19{,}8$$

Questa formula, che incontreremo molto spesso, mette quindi in relazione i prezzi di una call e di una put, (del medesimo strike), con il sottostante, il tasso di interesse privo di rischio e lo strike stesso.

Ed ora, cerchiamo di capire perché, a parità di scadenza, call e put devono avere la stessa volatilità implicita. L'esempio precedente, comunque, dovrebbe già aver convinto di quanto affermato. Ricordiamoci che quando valutiamo un'opzione assegnando ad essa una certa volatilità implicita se, a parità di tutti gli altri parametri, il prezzo cambia, deve necessariamente essere cambiata la volatilità!

Per una dimostrazione più rigorosa, riferirsi al riquadro successivo.

Supponiamo di adottare il modello B&S e, con questo, valutare i prezzi di una call e di una put, pari strike e scadenza. Per la PCP dovremmo allora scrivere:

$$c_{BS} + K \cdot e^{-rT} = p_{BS} + S_0$$

Sul mercato, invece, osserviamo prezzi diversi che, per non dare adito ad arbitraggi, devono anch'essi rispettare la PCP. Pertanto:

$$c_{mkt} + K \cdot e^{-rT} = p_{mkt} + S_0$$

Se ora prendiamo queste due equazioni e ne facciamo la differenza, membro a membro, otteniamo:

$$c_{BS} - c_{mkt} = p_{BS} - p_{mkt}$$

Da ciò possiamo affermare che se si adotta il modello B&S, per valutare una call ed una put, pari scadenza e strike, si commette lo stesso errore, per entrambe, rispetto ad i prezzi esposti dal mercato. Pertanto, se c_{BS} è stata valutata col modello B&S, applicando una certa volatilità, diciamo il 24%, allora anche p_{BS}, che è calcolata usando B&S, gli dovrà essere stata assegnata la medesima volatilità.

È sbagliata la formula? Oppure è errata qualcuna delle ipotesi?

Analizziamo la curva della volatilità implicita, questa curva ad "U", per capire meglio di che si tratta. Notiamo che la volatilità implicita tende a crescere via via che le opzioni put divengono OTM (e le call, naturalmente, ITM). Più ci spostiamo in quella direzione e maggiore è il livello di volatilità implicito loro assegnato. Se, invece, rispetto allo strike ATM, ci spostiamo verso destra, ovvero put ITM e call OTM, notiamo un effetto simile ma meno marcato: la volatilità implicita, anche in questo caso, tende ad aumentare ma più lievemente rispetto al caso precedente.

Secondo Mark Rubinstein, prima del crash dell'ottobre del 1987, la curva della volatilità implicita era molto meno marcata rispetto a ciò che si è cominciato ad osservare successivamente a tale data. Sempre

Rubinstein spiega l'esistenza dello smile con l'ipotesi di una sorta di *crash-fobia*, che porta i trader a valutare le opzioni put DOTM assegnando loro premi più alti (e, quindi, volatilità implicite maggiori) rispetto a quanto suggerito dalla B&S.

Tale spiegazione è ulteriormente supportata da alcune verifiche empiriche che hanno evidenziato una maggior pendenza della curva in corrispondenza delle fasi di ribasso degli indici azionari. E, viceversa: quando gli indici azionari salgono, la curva della volatilità implicita diviene meno accentuata.

Un'altra spiegazione fa riferimento al *leverage* delle azioni. Questo, è così definito:

$$Leverage = \frac{totale\ fonti\ di\ finanziamento}{capitale\ proprio}$$

dove la voce "totale fonti di finanziamento" rappresenta tutte le fonti a cui l'azienda attinge per finanziarsi (fidi bancari, emissione di obbligazioni, ecc.) incluso il capitale proprio.

Quando il valore del capitale proprio diminuisce, aumenta l'effetto leva e, con esso una maggiore rischiosità dell'azione e, conseguentemente, una maggiore volatilità. E viceversa.

In tutti i casi, quali che siano le possibili spiegazioni della presenza dello smile, in luogo di una volatilità implicita costante, non v'è dubbio che il trader deve prenderne atto e fare i conti con essa.

Sono convinto che sulla volatilità implicita si dovrà capire ancora molto. Si tratta di un argomento, per certi versi, per il quale è richiesta ancora molta investigazione.

Per non parlare, poi, di quella sorta di "teoremi", che ogni tanto capita di leggere in rete, secondo cui la volatilità implicita assegnata alle opzioni ATM corrisponderebbe al minimo della curva. Come si è potuto vedere nell'esempio mostrato in figura 8, tale "teorema" è palesemente disatteso!

Conclusioni

Come promesso, siamo entrati nel vivo di uno di quei parametri, la volatilità implicita, che maggiormente dovrebbero interessare il trader in opzioni. Molte delle strategie presenti in letteratura mirano proprio all'ottenimento di un profitto per il solo crescere, o diminuire, della volatilità implicita, a prescindere dal trascorrere del tempo o dalla variabilità del sottostante.

Nei prossimi articoli avremo modo di indagare ulteriormente altri effetti, che con la volatilità sono strettamente connessi, alcuni dei quali ancor poco discussi in letteratura.

Buona lettura!