La magia dell’interesse composto

Introduzione

Sembra che Einstein, il noto fisico, abbia affermato che l’interesse composto è l’ottava meraviglia del mondo. Non ci sono prove concrete che Einstein abbia effettivamente pronunciato questa frase. Tuttavia, la citazione è diventata famosa perché l'interesse composto è effettivamente un concetto finanziario molto potente, come cercherò di mostrare nei prossimi paragrafi.

Chi, invece, si è spesso riferito all’importanza dell’interesse composto è Warren Buffet, sicuramente uno degli investitori più conosciuti al mondo. Buffett ha attribuito gran parte del suo successo all'uso efficace dell'interesse composto. Ecco alcune delle sue osservazioni su questo argomento.

La mia ricchezza è arrivata da una combinazione di vivere in America, avere qualche gene fortunato, e l'interesse composto.

Come dire che interesse composto, ambiente favorevole e alcune abilità innate, sono gli elementi principali che spiegano la crescita significativa della sua ricchezza.

L’accumulazione del denaro può essere come una valanga di neve. La cosa importante è iniziare abbastanza presto a fare una palla di neve molto piccola, e poi farla scendere dalla collina più lunga possibile

In questa metafora Buffett descrive come, iniziare a investire presto e lasciare che gli interessi si accumulino nel tempo, può portare ad una crescita significativa del capitale. La *palla di neve* rappresenta il capitale iniziale e la lunghezza della discesa della *collina* rappresenta il tempo durante il quale l'interesse composto opera.

In altri termini, l'effetto dell'interesse composto dimostra come un investimento possa crescere significativamente nel tempo, e questo principio è alla base di molte strategie di risparmio ed investimento a lungo termine. Anche senza la conferma che Einstein abbia realmente pronunciato la famosa frase, il concetto di interesse composto continua ad essere una delle nozioni finanziarie più potenti e fondamentali nella finanza.

Interesse composto ed interesse semplice

Supponiamo di avere 5.000 € e di acquistare, con tale somma, uno strumento finanziario che ci garantisce un rendimento annuale del 4% per dieci anni. Cerchiamo di mostrare come operano l’interesse semplice e l’interesse composto.

Interesse semplice

Dopo il primo anno ci viene corrisposto l’interesse secondo il tasso stabilito. Interesse che si calcola nel modo seguente:

$$Interesse = \text{Capitale} \cdot \text{Tasso} = 5.000 \cdot 4\% = 5.000 \cdot 0{,}04 = 200\ €$$

Noi, ci mettiamo in tasca questi duecento euro e rimaniamo in attesa del termine del secondo anno. Dopo tale termine avverrà la medesima cosa, ovvero incasseremo lo stesso interesse 200 €. Ma perché? Perché il capitale, cioè i 5.000 €, è rimasto immutato. E così via per tutto il periodo. Al termine dei dieci anni che cosa accade? Che ci viene restituito il capitale più l'interesse dell'ultimo dei dieci anni. E noi, nel nostro portafoglio, che cosa abbiamo? Se, quei soldi che abbiamo incassato al termine di ciascun anno, non li abbiamo spesi, allora avremo:

$$Capitale\ dopo\ 10\ anni = \text{Capitale iniziale più Interesse maturato} = 5.000 + 200 \cdot 10 = 7.000\ €$$

Interesse composto

Dopo il primo anno ci viene corrisposto l'interesse secondo il tasso stabilito. Interesse che si calcola nel modo già visto. Ora però, e qui sta la differenza, questo interesse non ce lo mettiamo in tasca ma lo andiamo ad aggiungere al capitale che, ogni anno, beneficia del tasso del 4%. Quindi, al termine del secondo anno, avremo:

$$Capitale\ dopo\ 2\ anni = 5.200 + \text{Interesse maturato} = 5.200 + 5.200 \cdot 4\% = 5.408\ €$$

Osserviamo subito la differenza con l'interesse semplice: ci sono 8 € in più, nel caso dell'interesse composto. E dopo tre anni? Dobbiamo ragionare allo stesso modo:

$$Capitale\ dopo\ 3\ anni = 5.408 + \text{Interesse maturato} = 5.408 + 5.408 \cdot 4\% = 5.624{,}32\ €$$

Questa volta ci sono 24,32 € in più. Addirittura, oltre il triplo di quello che avevamo trovato, in più rispetto all'interesse semplice, dopo il secondo anno!

Si, ma dopo dieci anni? La formula generale, che per chi volesse approfondire questi concetti di matematica finanziaria rimando al box di approfondimento, è la seguente:

$$Capitale\ dopo\ n\ anni = 5.000 \cdot (1 + \mathrm{R})^n$$

avendo indicato con R il tasso e con n il numero degli anni. Quindi, nel nostro caso, dopo 10 anni:

$$Capitale\ dopo\ 10\ anni = 5.000 \cdot (1 + 0{,}04)^{10} = 7.401{,}22\ €$$

Se lo confrontiamo con l'esempio dell'interesse semplice, ci accorgiamo che vi sono ben 401,22 € in più: il 5,7% (circa). Non male!

Excel, ci può essere d'aiuto?

Prima di chiudere questa parte vorrei mostrare come ci può essere di aiuto Excel. La figura 1 illustra i calcoli che abbiamo appena delineato. In colonna B c'è l'interesse calcolato al termine di ciascun periodo (che in questo caso coincide con un anno). In colonna C vi è il capitale accumulato, sempre al termine di ogni anno.

B13 | =5000*POTENZA(1,04;10)

	A	B	C
1	Anno	interesse dopo il periodo [€]	capitale accumulato [€]
2	1	200,00	5200,00
3	2	208,00	5408,00
4	3	216,32	5624,32
5	4	224,97	5849,29
6	5	233,97	6083,26
7	6	243,33	6326,60
8	7	253,06	6579,66
9	8	263,19	6842,85
10	9	273,71	7116,56
11	10	284,66	7401,22
12			
13		7401,22	

Figura 1

In cella C11, evidentemente, il risultato finale al termine del decimo anno. Infine, in cella B13, l'applicazione diretta della formula per il calcolo del montante in regime di capitalizzazione composta (si dice così, in matematica finanziaria). La formula è visibile nella "barra della formula" di Excel.

Il riquadro azzurro che segue è un box di approfondimento. È pensato per coloro che desiderano approfondire questi concetti per averne maggior consapevolezza. Gli altri possono tranquillamente saltarlo, senza rischiare di compromettere la comprensione dell'argomento. Potrà succedere di trovarlo anche in successivi articoli.

Nell'ambito della finanza e degli investimenti vi sono due concetti che non fatico a definire fondamentali: il ***valore presente*** (PV, Present Value) ed il ***valore futuro*** (FV, Future Value). Si tratta di due grandezze legate tra di loro attraverso l'interesse semplice e l'interesse composto. Cerchiamo di fare la loro conoscenza.

Valore futuro (FV) e valore presente (o attuale) (PV)

Molto semplicemente, il *valore attuale* (si indica con PV, *presentvalue*) ci dice quale somma dobbiamo avere, oggi, per ottenere, dopo un certo tempo, e ad un determinato tasso R, un *valore futuro* (FV, *future value*). Nel caso di ***interesse semplice***, la formula è la seguente:

$$FV = \mathrm{PV} \cdot (1 + \mathrm{R} \cdot \mathrm{n})$$

dove R indica il tasso, espresso in decimale, ed n è il numero degli anni.

<u>Esempio 1</u> - Supponiamo di avere la somma di 1.000€ che investiamo al 6% per un anno. Quindi, PV=1.000, R=0,06 e n=1. Che cosa otteniamo?

$$FV = \mathrm{PV} \cdot (1 + \mathrm{R} \cdot \mathrm{n}) = 1.000 \cdot (1 + 0{,}06 \cdot 1) = 1.060 \text{ €}$$

E se gli anni sono due?

$$FV = \mathrm{PV} \cdot (1 + \mathrm{R} \cdot \mathrm{n}) = 1.000 \cdot (1 + 0{,}06 \cdot 2) = 1.120 \text{ €}$$

Nel caso di ***interesse composto***, la formula è la seguente:

$$FV = \mathrm{PV} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{R}}{m}\right)^{m \cdot n}$$

dove m indica il numero di volte che l'interesse viene composto in un anno. Di m, variabile importante e delicata, ce ne occupiamo meglio dopo. Per il momento supponiamo che gli interessi siano capitalizzati una sola volta ogni anno. In questo caso, diviene m=1.

<u>Esempio 2</u> – Immaginiamo di avere la somma di 1.000 € che investiamo al 6% per un anno. Quindi, PV=1.000, R=0,06 e n=1. Che cosa otteniamo per il valore futuro?

$$FV = \mathrm{PV} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{R}}{m}\right)^{m \cdot n} = 1.000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}06}{1}\right)^{1 \cdot 1} = 1.060 \text{ €}$$

Come si può osservare, il risultato non cambia se si usa la formula dell'interesse semplice o composto. Questo perché gli interessi vengono capitalizzati una sola volta all'anno. E se gli anni sono due?

$$FV = \mathrm{PV} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{R}}{m}\right)^{m \cdot n} = 1.000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}06}{1}\right)^{1 \cdot 2} = 1.000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}06}{1}\right)^{2} = 1.123{,}6 \text{ €}$$

E non 1.120, come nel caso dell'interesse semplice!

<u>In finanza, si usa maggiormente l'interesse composto in quanto riflette più accuratamente il comportamento reale degli investimenti e dei prestiti. Strumenti finanziari come conti di risparmio, obbligazioni, fondi comuni, mutui e carte di credito calcolano gli interessi in modo composto.</u>

Ora, invece, proviamo a ragionare al contrario. Supponiamo che la domanda sia la seguente:

di quale somma devo disporre, oggi, per avere, fra tre anni, 10.000 € al tasso del 5%?

Dobbiamo invertire la formula. Se, prima, FV era la nostra incognita, ora lo è PV. Quindi:

$$PV = \frac{\mathrm{FV}}{\left(1 + \frac{\mathrm{R}}{m}\right)^{m \cdot n}} = \frac{10000}{(1 + 0{,}05)^3} = 8.638{,}376$$

Insomma, investendo poco più di 8.600 euro, per tre anni, al tasso del 5% (per esempio, acquistando titoli governativi statunitensi), si otterrebbe, al termine del periodo, la somma di 10.000 euro.

E se conosco la durata del finanziamento ed i valori futuro e presente, come faccio a calcolare il tasso? In sostanza, se voglio rispondere a domande del tipo:

Mi hanno chiesto 1.000 € e mi hanno detto che, fra tre anni, mi restituiranno 1.150 €. Quale tasso stanno applicando al mio prestito?

Che calcolo devo fare?

Vediamo. Ripartiamo dalla formula che lega tutte le grandezze finanziarie:

$$FV = \mathrm{PV} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{R}}{m}\right)^{m \cdot n}$$

Per semplicità, consideriamo m=1 (capitalizzazione annuale), e cerchiamo di ricavare la variabile R.

$$FV = \mathrm{PV} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{R}}{m}\right)^{m \cdot n} \rightarrow FV = \mathrm{PV} \cdot (1 + R)^n \rightarrow \sqrt[n]{\frac{FV}{\mathrm{PV}}} = 1 + R \rightarrow R = \sqrt[n]{\frac{FV}{\mathrm{PV}}} - 1$$

Applichiamo la formula trovata all'esempio dell'ultima domanda:

$$R = \sqrt[n]{\frac{FV}{\mathrm{PV}}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{1.150}{1.000}} - 1 = 1{,}048 - 1 = 0{,}048 = 4{,}8\%$$

E, infine, se l'incognita è il periodo temporale? Anche qui, dopo qualche passaggio (che vi evito), si ottiene:

$$n = log_{1+R} \frac{FV}{\mathrm{PV}}$$

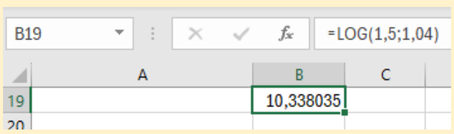
Il logaritmo, come i lettori più attenti avranno notato, è in una base … strana: 1+R! Un logaritmo di difficile computazione visto che non è in base dieci e, neppure in base neperiana (o naturale). Per fortuna, ed ora lo vedremo, possiamo chiedere aiuto ad un foglio elettronico.

Anche qui, applichiamo la formula per rispondere ad una possibile domanda, come la seguente:

Dispongo della somma di 1.000 € e desidero avere, al tasso del 4%, la somma di 1.500 €. Quanto tempo, in anni, occorre?

$$n = log_{1+R} \frac{FV}{\mathrm{PV}} = log_{1{,}04} \frac{1.500}{1.000} = 10{,}338$$

Ebbene, serviranno poco più di 10 anni (in figura, l'uso di Excel per calcolare il logaritmo di 1,5 in base 1,04)!



Chiediamo aiuto ad Excel per un esempio un po' più complesso

Ed ora proviamo ad usare il foglio elettronico per il seguente esempio.

Vogliamo vedere che cosa succede se investiamo 1.000 € ogni anno, al tasso del 4%, per dieci anni. Mettiamo a confronto i diversi risultati che si ottengono dall'applicazione della capitalizzazione semplice e di quella composta (vedi figura 2).

Capitalizzazione semplice

Analizziamo la colonna J, dove è stato sviluppato il piano in regime di interesse semplice. Dopo il primo anno, colonna J2, otteniamo la somma di 1.040 €. Ci teniamo i 40 € ed iniziamo il secondo anno con 2.000 €, grazie al secondo versamento. Quindi, al termine del secondo anno, otteniamo 2.080 €. Ci mettiamo in tasca gli 80 € e ripartiamo, col terzo anno, con un capitale di 3.000 €. E così via fino al termine del decimo anno. Attenti, però: il risultato finale non è quello indicato in cella J11, è solo quanto si ottiene, dopo il decimo anno. Mancano, però, tutti gli interessi che abbiamo trattenuto nel tempo (nei nove anni precedenti). Ovvero:

$$40 + 80 + 120 + 160 + 200 + 240 + 280 + 320 + 360 = 1.800\ €$$

(non ho messo gli ultimi 400 € in quanto inclusi in cella J11).

Quindi, complessivamente, al termine del periodo:

$$10.400 + 1.800 = 12.200\ €$$

Ed ora vorrei mostrare un'altra modalità, matematicamente equivalente, che ci conduce al medesimo risultato. Ritengo che sia utile per comprendere, con maggior contezza, il meccanismo con cui agisce l'interesse semplice nel caso di più versamenti periodici.

Consideriamo ognuno dei dieci versamenti in modo indipendente dagli altri. Il primo versamento, che beneficerà dell'interesse del 4% per dieci anni, produce il seguente montante:

$$Montante\ del\ primo\ versamento\ dopo\ 10\ anni = 1.000 + 40 \cdot 10 = 1.400\ €$$

Il secondo versamento, invece, beneficerà dell'interesse del 4% solo per nove anni. Pertanto, dopo tale periodo di tempo, si avrà:

$$Montante\ del\ primo\ versamento\ dopo\ 9\ anni = 1.000 + 40 \cdot 9 = 1.360\ €$$

E così via fino all'ultimo versamento che, gioco forza, godrà dell'interesse maturato per un solo anno. A questo punto si dovranno sommare i montanti ottenuti dall'azione di ciascun singolo versamento. Ovvero:

$$1.400 + 1.360 + 1.320 + 1.280 + 1.240 + 1.200 + 1.160 + 1.120 + 1.080 + 1.040 = 12.200\ €$$

che, come si potrà apprezzare, coincide con il risultato ottenuto con l'altro metodo.

Capitalizzazione composta

In colonna K, invece, quello che accade se la capitalizzazione è composta. Osservate la formula in cella K3: c'è scritto che dobbiamo sommare a K2 (che è il capitale dopo il primo anno, ovvero 1.040 €) il nuovo versamento (1.000 €) e moltiplicare il tutto per il tasso di interesse (in cella B2) aumentato di 1. Tale formula viene poi ripetuta nelle celle successive e, al termine del decimo anno, troviamo che il nostro capitale è divenuto 12.486,35, una somma che è oltre il 2% più elevata di quella ottenuta con l'applicazione del tasso di interesse semplice.

K3 | =(K2+$B$4)*(1+$B$2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Numero di anni:	10							Anno	Interesse semplice	Interesse composto
2	Tasso di interesse annuale:	4%							1	1040	1040,00
3	Periodicità dei versamenti:	annuale							2	2080	2121,60
4	Versamento annuale:	1.000							3	3120	3246,46
5									4	4160	4416,32
6									5	5200	5632,98
7									6	6240	6898,29
8									7	7280	8214,23
9									8	8320	9582,80
10									9	9360	11006,11
11									10	10400	12486,35

Figura 2

Tutto ciò, per capire quello che succede, ad un investimento, in regime di capitalizzazione composta.

Ma Excel ci fornisce direttamente la funzione per eseguire questo calcolo. Lo vediamo in figura 3.

K13 | =VAL.FUT(B2;B1;B4;0;1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Numerodi anni:	10							Anno	Interesse semplice	Interesse composto
2	Tasso di interesse annuale:	4%							1	1040	1040,00
3	Periodicità dei versamenti:	annuale							2	2080	2121,60
4	Versamento annuale:	1.000							3	3120	3246,46
5									4	4160	4416,32
6									5	5200	5632,98
7									6	6240	6898,29
8									7	7280	8214,23
9									8	8320	9582,80
10									9	9360	11006,11
11									10	10400	12486,35
12											
13											-12486,35

Figura 3

In cella K13, di figura 2, è riportata la funzione per il calcolo del valore futuro. I primi tre argomenti, nell'ordine, sono: il tasso di interesse annuale, il numero di anni di durata del piano di investimento, il valore del versamento annuale. Il quarto argomento, che nel nostro caso è zero, indica il valore della somma dalla quale parte il piano. L'ultimo argomento, 1 per l'esempio, indica se il versamento annuale va fatto all'inizio (1) o alla fine del periodo (0 o omesso). Notate la perfetta corrispondenza con quanto riportato in cella K11. Il segno negativo che riporta Excel è puramente convenzionale. I valori positivi sono soldi che escono dalle nostre tasche e quelli negativi, sono soldi che entrano nelle nostre tasche. Il terzo argomento, B4, che indica ciò che versiamo all'inizio di ogni anno, è positivo: sono soldi che escono dal nostro conto. Il risultato che vediamo in cella K13 è negativo: sono soldi che rientrano nel nostro conto.

E se, a 65 anni, volessi avere 100.000 €?

Bella domanda! Soprattutto in un'epoca, come quella che stiamo vivendo, in cui i sistemi pensionistici pubblici sono spesso soggetti a pressioni economiche e demografiche che possono ridurre le prestazioni future.

Con la formula riportata in cella K13, figura 3, possiamo fare qualche simulazione per rispondere alla domanda posta. Per usare quella formula dobbiamo fare due ipotesi: il tasso e la durata in anni. Supponendo un tasso del 4% ed immaginando che la persona che si sta ponendo questa domanda abbia 25 anni, allora dovremo imporre una durata di 40 anni. Pertanto:

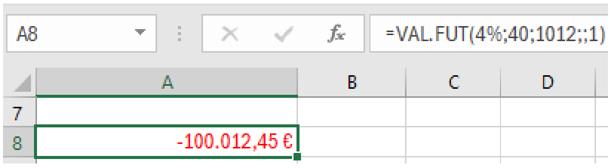


Figura 4

Dopo qualche simulazione scopriamo che ci vogliono, circa, 1.012 € ogni anno. In sostanza, ne versiamo:

$$1.012 * 40 = 40.480$$

Per ottenerne 100.000 € circa: un capitale finale pari a circa 2,5 volte ciò che abbiamo versato negli anni!

Ed ora supponiamo che vi siano due genitori, illuminati, che decidano di attuare un tale piano di versamenti, diciamo per i primi venti anni (sarà poi il figlio, naturalmente, che proseguirà il piano fino all'età di 65 anni). Quale cifra avrebbero dovuto versare? Vediamo.

La figura 5 ci mostra che avrebbero dovuto fare un versamento annuale di circa 326 €. Qui, addirittura, la somma dei versamenti effettuati nel tempo è poco superiore a 20.000 €!

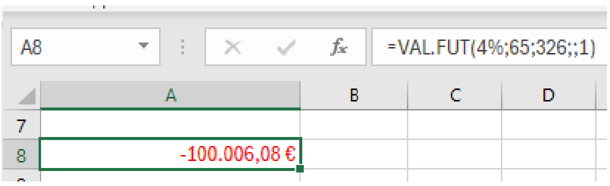


Figura 5

Si intuisce che prima si comincia e più si dà il tempo, all'interesse composto, di poter agire. Ricordate Le metafore di Warren Buffet?

E, ovviamente, vale il contrario. Supponiamo che questa domanda se la ponga un quarantenne che, evidentemente, avrà dinanzi a sé solo 25 anni. Vediamo.

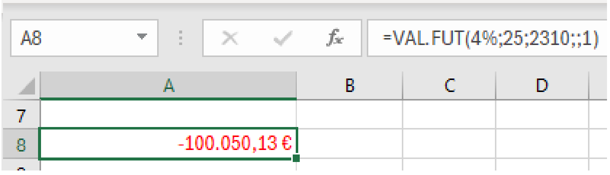


Figura 6

Dovrebbe fare un versamento annuale di 2.310 € circa. Diciamo che per un lavoratore, è (quasi) sicuramente una spesa sostenibile.

E se il desideroso di ottenere tale cifra, a 65 anni, ne avesse già 60? Quale versamento annuale vi attendete debba fare? Facciamo eseguire al nostro fidato amico, Excel, il calcolo.

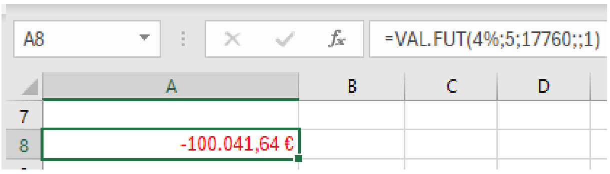


Figura 7

17.760 € l'anno, circa! Insomma, un esborso annuale decisamente importante. Probabilmente, per la maggior parte dei sessantenni, credo sia un sogno a cui si debba rinunciare.

Naturalmente questo è solo un modello di ragionamento che, seppur corretto, non tiene conto di una serie di fattori che nel mondo reale vi sono. Innanzitutto, non abbiamo tenuto in considerazione le spese e le commissioni richieste dal broker (o dalla banca). Inoltre, il tasso è ritenuto costante per tutta la durata dell'investimento. Ed anche questo non è vero. Ci potranno essere periodi con tassi più bassi, e ciò si traduce in un minor montante, e periodi con tassi più elevati, che porteranno ad un montante più alto.

Il modello, però, in linea di principio è valido e dovrebbe far riflettere il lettore (soprattutto il giovane lettore) sulle potenzialità dell'interesse composto.

E se la capitalizzazione avviene per periodi inferiori all'anno?

In questo caso, come mostreremo, tutti i risultati sin qui ottenuti migliorano sensibilmente. Facciamo alcuni esempi. Riprendiamo la formula che lega valore futuro, valore attuale, tasso, durata e frequenza di capitalizzazione (vista nel box di approfondimento).

$$FV = \mathrm{PV} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{R}}{m}\right)^{m \cdot n}$$

Come primo esempio, consideriamo un investimento di 1.000 € per 10 anni al tasso del 5% e frequenza di capitalizzazione annuale. Quindi, m=1. Che cosa otteniamo:

$$FV = \mathrm{PV} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{R}}{m}\right)^{m \cdot n} = 1.000 \cdot \left(1 + \frac{5\%}{1}\right)^{1 \cdot 10} = 1.628{,}89 \text{ €}$$

E se la frequenza di capitalizzazione fosse semestrale? Vediamo il calcolo.

$$FV = \mathrm{PV} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{R}}{m}\right)^{m \cdot n} = 1.000 \cdot \left(1 + \frac{5\%}{2}\right)^{2 \cdot 10} = 1.638{,}62 \text{ €}$$

Che, come si può notare, conduce ad un risultato più elevato. E se fosse trimestrale?

$$FV = \mathrm{PV} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{R}}{m}\right)^{m \cdot n} = 1.000 \cdot \left(1 + \frac{5\%}{4}\right)^{4 \cdot 10} = 1.643{,}62 \text{ €}$$

Possiamo concludere che, maggiore è la frequenza di capitalizzazione, e maggiore sarà il capitale a scadenza (FV).

Bene, provate ad esercitarvi con ulteriori esempi.

Ultima considerazione. E se quei genitori avveduti avessero trovato una forma di investimento con capitalizzazione mensile? Vediamo come far fare il calcolo ad Excel.

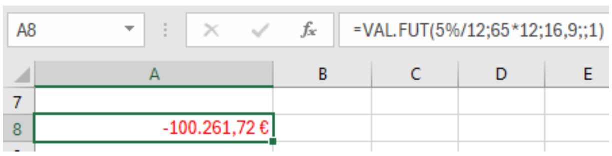


Figura 8

Avrebbero dovuto versare mensilmente, una somma circa uguale a 16,9 €. Rispetto al caso precedente, in cui il versamento avveniva annualmente ed era pari a 326 € si ha un bel risparmio. Infatti, in questo caso, ciò che verrà versato in un intero anno è:

$$16{,}9 * 12 = 202{,}8 \text{ €}$$

Infine, si osservi la barra della formula per vedere come è stato impostato il calcolo: il tasso è stato diviso per 12 ed anche il numero dei periodi annuali, n, è stato moltiplicato per 12. In accordo con la formula generale. Ed ora, non resta che riflettere, ed esercitarsi.

Conclusioni

Spero che il lettore abbia compreso la potenza dell'interesse composto. Uno dei meccanismi più diffusi a disposizione di chi ne voglia beneficiare per la propria finanza personale.

Buon lavoro!