Put-Call parity (parte seconda)

Premessa

La put-call parity, che abbiamo introdotto nella prima parte, è una formula molto potente. Una formula che ci consente di comprendere molto bene i meccanismi della finanza quantitativa. Meccanismi che, negli ultimi decenni, hanno consentito all'ingegneria finanziaria di realizzare prodotti sempre più complessi e mirati alle esigenze di chi opera nel mondo della finanza.

Lo scopo di questa seconda parte è quello di entrare sempre più nell'architettura di questa formula. Da un lato, per guadagnare quella consapevolezza finanziaria che ogni trader deve necessariamente avere, per poter affrontare, con la contezza necessaria, questo difficile mestiere; e, dall'altro, per comprendere come si riesce a giungere alla costruzione di figure che, in letteratura, sono denominate *posizioni sintetiche*.

Quindi, cercate di seguirmi con calma ed attenzione: due requisiti indispensabili, a mio avviso, per fare assieme questo viaggio ed arrivare al traguardo.

Capitalizzazione continua, valore attuale, valore futuro, sconto e … un po' di matematica!

Della capitalizzazione continua ho già avuto modo di discorrere[1], in vostra compagnia e, nel caso si renda necessario rinfrescare tale concetto, suggerisco di tornare a leggere quelle pagine. Qui mi preme sottolineare che la capitalizzazione continua, molto usata nell'ambito della finanza quantitativa, è utile per calcolare il valore futuro ed il valore presente (o attuale) di un investimento.

Molto semplicemente, il *valore attuale* (si indica con PV, *present value*) ci dice quale somma dobbiamo avere, oggi, per ottenere, dopo un certo tempo t, e ad un determinato tasso, un *valore futuro* (FV, *future value*).
In matematica finanziaria, la formula è la seguente:

$$FV = \mathrm{PV}(1 + \mathrm{R})^n$$

dove R indica il tasso, espresso in decimale, ed n è il numero degli anni (se gli interessi vengono capitalizzati una sola volta all'anno).

Come di consueto, facciamo un esempio. Supponiamo di avere la somma di 1.000€ che investiamo al 4% per un anno. Quindi, PV=1.000, R=0,04 e n=1. Che cosa otteniamo?

$$FV = 1000(1 + 0{,}04)^1 = 1.000(1{,}04) = 1.040$$

E se gli anni sono due?

$$FV = 1000(1 + 0{,}04)^2 = 1.000(1{,}04)^2 = 1.081{,}6$$

E non 1.080! Grazie alla capitalizzazione composta.

Ora, invece, proviamo a ragionare al contrario. Supponiamo che la domanda sia la seguente:

di quale somma devo disporre, oggi, per avere, tra tre anni, 10.000€ al tasso del 5%?

Dobbiamo invertire la formula. Se, prima, FV era la nostra incognita, ora lo è PV. Quindi:

$$PV = \frac{\mathrm{FV}}{(1 + \mathrm{R})^n} = \frac{10000}{(1 + 0{,}05)^3} = 8.638{,}376$$

Insomma, investendo poco più di 8.600 euro, per tre anni, al tasso del 5% (per esempio, acquistando titoli governativi statunitensi), si avrebbe restituita la somma di 10.000 euro.

E se avessimo usato la formula della capitalizzazione continua? Vediamo.

[1] Volatilità (parte seconda)

$$FV = \text{PV}\text{e}^{Rn} = 1000\text{e}^{0,04\cdot 1} = 1.000(1,040811) = 1.040,811$$

Insomma, ci possiamo stare, in fondo la distanza tra queste due formule è inferiore allo 0,08%!

E se volessi, in capitalizzazione continua, calcolare il valore attuale? Ecco la formula:

$$PV = \text{FV}\text{e}^{-Rn} = 10000\text{e}^{-0,05\cdot 3} = 8.607,08$$

Anche qui, c'è un piccolo scostamento, inferiore allo 0,4%.

Però, i vantaggi di usare la capitalizzazione continua sono davvero tanti ed è per questo che in finanza quantitativa si usa questa formula piuttosto dell'altra.

E se conosco il tasso ed i valori futuro e presente, come faccio a calcolare il periodo di tempo? Qualche passaggio matematico,

$$PV = \text{FV}\text{e}^{-Rn} \quad \rightarrow \quad \frac{PV}{\text{FV}} = \text{e}^{-Rn} \quad \rightarrow \quad ln\frac{PV}{\text{FV}} = -\text{Rn}$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che la funzione inversa dell'esponenziale è il logaritmo neperiano; infine:

$$n = -\frac{1}{R}ln\frac{PV}{\text{FV}}$$

Vediamo l'applicazione ad uno degli esempi precedenti, per vedere se torna.

$$n = -\frac{1}{R}ln\frac{PV}{\text{FV}} = -\frac{1}{0,04}ln\frac{1.000}{1.040,811} = -25\cdot(-0,04) = 1$$

Cioè, un anno, come dovevamo attenderci.

E, infine, se l'incognita è il tasso? Anche qui, qualche passaggio (che vi evito), e ci siamo:

$$R = -\frac{1}{n}ln\frac{PV}{\text{FV}}$$

Insomma, con la capitalizzazione continua occorre prendere confidenza in quanto nel mondo dei derivati è quella la formula che si usa per il calcolo delle variabili FV, PV, R ed n.

A proposito del linguaggio che si usa in finanza, ricordate che con il termine *attualizzare*, si intende il calcolo del valore presente. Quindi, nell'esempio prima fatto, attualizzare 10.000 euro al tasso del 5% per un periodo di 3 anni, significa calcolare il relativo valore presente (8.638€ circa).

Mentre, con il termine *sconto*, si indica la differenza tra FV e PV (nel nostro esempio 1.362€) e rappresenta il compenso richiesto da chi anticipa il capitale.

Alla ricerca di una comprensione più profonda della put-call parity

Riprendiamo la formula oggetto di questo articolo e cerchiamo di sezionarla per capirne maggiormente il senso.

$$c + K\cdot e^{-rT} = p + S_0$$

Innanzitutto, ricordiamo che cosa significano quei simboli:

c e ***p*** sono i premi, rispettivamente, della call e della put. ***K*** è lo strike di entrambe le opzioni, S_0 è il sottostante valutato all'istante t=0; l'istante, cioè, in cui valutiamo tutte le variabili che intervengono nella formula. Con ***r*** indichiamo il tasso privo di rischio e con ***T*** la durata residua (annualizzata) dei contratti di opzione.

Per prima cosa, permettetemi di riscriverla in un modo un po' diverso. Portiamo p dal secondo al primo membro, riordiniamo ed otteniamo:

$$K\cdot e^{-rT} + c - p = S_0$$

Ora, cerchiamo di capire che cosa c'è scritto. Al primo membro c'è la differenza c-p. Che cosa rappresenta? Rappresenta il costo che sosteniamo per acquistare l'opzione call decurtato dell'incasso che realizziamo per la vendita della put. Entrambe le opzioni hanno il medesimo strike K e la medesima scadenza T. Poi, sempre al primo membro, c'è anche il termine $K \cdot e^{-rT}$, ma su quello torneremo tra poco. Al secondo membro, c'è S_0, ovvero il sottostante su cui i contratti di quelle opzioni sono scritte. Quindi, sembrerebbe corretto poter dire che la formula afferma:

un portafoglio, contenente 100 azioni di una certa società, è equivalente ad un portafoglio contenente una long call ed una short put, aventi medesima scadenza e strike, ognuna delle quali governa 100 azioni di quel sottostante.

Bene, questa affermazione è quasi vera, ma non del tutto. Perché? Perché non abbiamo tenuto in considerazione dell'altro termine: $K \cdot e^{-rT}$. E cosa rappresenta questo termine? Rappresenta una certa quantità monetaria. Più tecnicamente, dovremmo dire che

rappresenta il valore dello strike attualizzato al tasso r per un periodo di tempo T.

Ma cerchiamo di capire bene quest'ultima affermazione. Facciamo un esempio. Consideriamo il Dax, quale sottostante. E supponiamo che le due opzioni del portafoglio che rappresenta il primo membro dell'equazione, la call e la put, abbiano lo strike 18.500. Supponiamo, inoltre, che il tasso privo di rischio sia del 6,35% e che la scadenza delle opzioni sia giugno 2024.

Facciamo qualche calcolo. Prima di tutto calcoliamo T.

Nel momento in cui scrivo, sono le 15:18 del 4/4/2024. La scadenza delle opzioni è il 21/06/2024 alle ore 13:00. Facciamo il calcolo della differenza tra queste due date e troviamo: 77,90 giorni. A questo punto annualizziamo tale numero di giorni (ovvero, dividiamo per 365) ed abbiamo: 0,213. E, infatti, quel numero di giorni è poco meno di un trimestre, quindi poco meno di un quarto d'anno (se fosse stato un quarto d'anno, T sarebbe stato pari a 0,25).

Ed ora calcoliamo il fattore esponenziale.

$$e^{-rT} = e^{-(0{,}0635 \cdot 0{,}213)} = 0{,}987$$

A questo punto possiamo attualizzare lo strike.

$$K \cdot e^{-rT} = 18.500 \cdot 0{,}987 = 18.251$$

Fermiamoci un momento e riflettiamo. Che cosa rappresenta questo numero? Rappresenta il valore attuale di 18.500 con r, come tasso di attualizzazione e T come periodo di tempo. In altri termini, al tasso del 6,35 %, l'importo di 18.251 punti in circa 78 giorni diviene 18.500 (sto ragionando in punti ma, conoscendo il valore in euro di ogni punto, quei numeri li possiamo trasformare in quantità monetarie).

Quindi, il portafoglio che rappresenta il primo membro, dopo un intervallo di tempo pari a T, aumenta di valore; nell'esempio, aumenta di circa 249 punti. Ma perché accade questo fenomeno? Siccome la formula deve poter rappresentare due portafogli in equilibrio, ciò significa che, sempre nel portafoglio del primo membro, ci deve essere un'altra quantità che perde questi punti. E, c'è poco da fare: questa quantità è la differenza **c-p**.

Proviamo, ora, a vedere che cosa accade se, a scadenza, il sottostante assume tre possibili valori: 18.400, 18.500 e 18.600. In figura 1 riporto il valore dei due portafogli: quello del membro di sinistra dell'equazione (primo membro) e quello del membro di destra della stessa (secondo membro). Relativamente al portafoglio del primo membro, inoltre, ho preferito rappresentare tutte le tre quantità che lo formano: il fattore di attualizzazione dello strike, il valore della call e quello della put.

Ora, se ci ragionate un momento, il termine inerente al fattore di attualizzazione vale sempre 18.500. Ciò in quanto, a scadenza (le ore 13:00 del 21/06/2024), T=0, e:

$$K \cdot e^{-rT} = 18.500 \cdot e^{-r \cdot 0} = 18.500 \cdot e^{0} = 18.500 \cdot 1 = 18.500$$

In quarta riga, pertanto, troviamo questo valore che si ripete per ciascuna delle tre colonne.

Ed ora analizziamo i due portafogli per ciascun valore del sottostante a scadenza. In prima colonna, stiamo ipotizzando che il sottostante, a scadenza, valga 18.500. Le due opzioni, per tale valore, scadono senza valore. Pertanto:

$$18.500 + 0 + 0 = 18.500$$

In seconda colonna, invece, vi è l'ipotesi che il sottostante, a scadenza, valga 18.400. Per tale valore la call verrà abbandonata e la put, scadendo ITM, ci costringerà a pagare 100 punti al compratore di tale opzione. Quindi:

$$18.500 + 0 - 100 = 18.400$$

E infine, in terza colonna, ipotizziamo che il sottostante, a scadenza, valga 18.600. Questa volta è la call che scade ITM e, per essa, incassiamo 100 punti. La put, invece, scadendo OTM, sarà abbandonata. In definitiva:

$$18.500 + 100 - 0 = 18.600$$

ptf 2° membro (S_T)	18500	18400	18600
ptf 1° membro	18500	18400	18600
$K \cdot e^{-rT}$	18500	18500	18500
Call	0	0	100
Put	0	-100	0

Figura 1

In conclusione, per ciascuno dei tre valori del sottostante a scadenza i due portafogli risulteranno sempre in equilibrio (per esercizio, provate a fare i calcoli per altri valori del sottostante a scadenza, 18.250, 18.100, 17.900, …).

Ed ora, per convincerci ancor più della bontà della formula, proviamo a vedere che cosa accade se varia il sottostante con il tempo immutato (15:18 del 4/4/2024). Usiamo la formula B&S (Black and Scholes) per calcolare la volatilità implicita associata a ciascuna delle due opzioni. Troviamo: 12,19%. Con tale valore, determiniamo i premi della call e della put nel caso che il sottostante vari di 50 punti in aumento ed in diminuzione. In figura 2 lo specchietto riepilogativo.

ptf 2° membro (S_T)	18408	18358	18458
ptf 1° membro	18408	18358	18458
$K \cdot e^{-rT}$	18251	18251	18251
Call	495	468	524
Put	338	360	317

Figura 2

Analizziamolo. Il fattore di attualizzazione, che nel dettaglio abbiamo già calcolato nella pagina precedente, non varia, dal momento che esso dipende da tre variabili (strike, tasso free risk e tempo alla scadenza) che rimangono costanti. Pertanto, il suo valore (18.251), rimarrà costante per ognuno dei tre valori del sottostante.

In prima colonna, abbiamo i valori dei premi della call e della put rilevati alle 15:18 del 4 aprile, quando il sottostante vale 18.408. Pertanto:

$$18.251 + 495 - 338 = 18.408$$

Ora, ipotizziamo che il sottostante diminuisca di 50 punti (seconda colonna). Calcolando i premi delle due opzioni con la B&S si trova quanto riportato in figura 2. E quindi:

$$18.251 + 468 - 360 = 18.359$$

(la differenza di un punto, tra i due membri, è dovuta al fatto che Excel non visualizza i decimali ma ne tiene conto, comunque, nei calcoli).

infine, supponiamo che il sottostante aumenti di 50 punti (terza colonna). Calcolando i premi delle due opzioni con la B&S si trova quanto riportato in figura 2. E quindi:

$$18.251 + 524 - 317 = 18.458$$

Come si può notare, i due portafogli sono sempre in equilibrio.

Verso le posizioni sintetiche

Per comprendere come nasce una posizione sintetica, dobbiamo tornare alla put-call parity e rimaneggiarla matematicamente (solo un pochino, non spaventiamoci).

Sappiamo che, in un'equazione, noi possiamo moltiplicare ambo i membri della stessa senza alterare l'equazione stessa. E allora, dalla

$$K \cdot e^{-rT} + c - p = S_0$$

moltiplichiamo ciascun membro per la quantità e^{rT} e si ottiene:

$$K \cdot e^{-rT} \cdot e^{rT} + (c - p) \cdot e^{rT} = S_0 \cdot e^{rT}$$

Sappiamo che il prodotto di due potenze, che hanno per base la stessa base, è uguale ad una potenza con la stessa base e con esponente pari alla somma degli esponenti, di conseguenza:

$$e^{-rT} \cdot e^{rT} = e^{rT-rT} = e^0 = 1$$

Dunque:

$$K + (c - p) \cdot e^{rT} = S_0 \cdot e^{rT}$$

Questa volta il fattore e^{rT}, a causa del cambiamento di segno all'esponente, non è più un fattore di attualizzazione ma un fattore di capitalizzazione. E come già sappiamo:

$$S_0 \cdot e^{rT} = F_0$$

Quindi, in definitiva, possiamo scrivere:

$$K + (c - p) \cdot e^{rT} = F_0$$

Esaminiamo l'ultima relazione. Il secondo membro è molto semplice: rappresenta il valore di un future all'istante iniziale. E al primo membro cosa c'è? C'è una long call ed una short put, entrambe capitalizzate al tasso r e per un periodo T, più una somma in denaro pari allo strike di queste due opzioni, K.

E allora, vediamo se è in equilibrio rispetto a variazioni di tempo e di sottostante. Innanzitutto, immaginiamo di avere un primo portafoglio che contiene una long call, una short put ed una somma in denaro pari a K. Questo portafoglio è equivalente al primo membro della nostra equazione. Un secondo portafoglio, inoltre, conterrà solo un future (naturalmente scritto sullo stesso sottostante e con scadenza T).

Se l'equazione è in equilibrio, allora i due portafogli devono essere equivalenti. Vediamolo. Facciamo una foto (10:47 del 5/4/2024) dei valori di mercato del future e di due opzioni strike 18.500 (sottostante Dax).

ptf 2° membro (F_0)	18381	18431	18331
ptf 1° membro	18383	18435	18335
K	18500	18500	18500
Call (c)	366,5	390	344
Put (p)	481,5	455	509
$(c+p) \cdot e^{rT}$	-116,553	-65,78841	-167,244

Figura 3

Leggiamo i valori della seconda colonna di figura 3. In prima riga, abbiamo il valore del future (Dax), che vale 18.381, che rappresenta il portafoglio del secondo membro. In terza riga, abbiamo il portafoglio del primo membro ottenuto sommando allo strike K (18.500), la differenza call meno put capitalizzata al tasso r e per il periodo T (valore che troviamo in ultima riga).

In terza colonna abbiamo la stessa situazione ma con una variazione positiva del sottostante di 50 punti. E, in quarta colonna, invece, si è ipotizzata una variazione negativa del sottostante, sempre di 50 punti.

Come vedete i due portafogli, a parte qualche punto, sono equivalenti. A proposito di questi pochi punti, che rappresentano uno scostamento percentuale dello 0,02% circa, è doverosa una precisazione. Non dobbiamo pensare, necessariamente, che rappresentino un'opportunità di arbitraggio. Ci sono troppe variabili che, alla fine, restituiscono un risultato aleatorio. Ne descrivo qui qualcuna, senza alcuna pretesa di esaustività. Ad esempio, le celle Excel che contengono i collegamenti DDE potrebbero aggiornarsi con qualche frazione di secondo di differenza; oppure, lo stesso server DDE del broker, potrebbe inviare i dati non tutti nello stesso istante; inoltre, Excel, quando fa i calcoli aggiornando i valori di ogni cella, evidentemente non lo fa per tutte le celle allo stesso istante (così ci appare, a causa dei nostri "tempi umani" non confrontabili con quelli di un PC), ma una alla volta secondo un preciso ordine sequenziale.

E, se anche fosse un'opportunità di arbitraggio, vi suggerirei di non rincorrerla! Intanto, dovreste valutare se quella piccola quantità di denaro che volete guadagnare è sufficiente per il pagamento delle commissioni dirette ed occulte (differenza denaro-lettera e slippage). E poi, volete mettervi in competizione con macchine che operano sul mercato con tempi di latenza di una decina di millisecondi circa? Rimaniamo umani e combattiamo le macchine sul nostro terreno, quello dell'intelligenza e della creatività e non sul loro campo, quello della velocità! In questo secondo caso, la nostra sconfitta sarebbe un evento certo e non aleatorio!

Scusate la digressione.

Concludiamo la nostra dimostrazione (sperimentale) andando ad osservare che cosa succede se varia il tempo.

In figura 4 il confronto tra i due portafogli, con il sottostante invariato, all'istante t=0 (ovvero, 5/4/24), un mese dopo e nel giorno della scadenza.

I due portafogli, nei limiti degli errori di misura già evidenziati, sono sostanzialmente equivalenti.

Possiamo quindi affermare che:

l'acquisto di un future è equivalente all'acquisto di una call e la contemporanea vendita di una put, entrambe di pari strike e scadenza (ovviamente, i tre derivati sono scritti sul medesimo sottostante).

	05/04/2024 10:47	05/05/2024 10:47	21/06/2024 13:00
ptf 2° membro (F_0)	18381	18282	18131
ptf 1° membro	18383	18286	18131
K	18500	18500	18500
Call (c)	366,5	233	0
Put (p)	481,5	448	369
$(c+p) \cdot e^{rT}$	-116,552763	-216,039085	-369

Figura 4

Quindi l'acquisto di una call e la contemporanea vendita di una put, pari strike e scadenza, rappresentano una posizione sintetica, in quanto replicano, puntualmente, il valore di un long future.

E le greche?

La questione delle greche va precisata con attenzione in quanto, per una posizione sintetica come quella appena descritta, vi è come una sorta di congelamento di queste variabili. È un discorso che, successivamente, ci porterà al concetto di box.

Partiamo dal delta

Vi ricordo (ne abbiamo già discusso in un altro articolo) che le greche di portafoglio si calcolano sommando algebricamente le greche di ogni opzione presente nel portafoglio stesso. Nel nostro caso, al primo membro, abbiamo una long call ed una short put. Quindi, scriviamo:

$$\Delta = \Delta_{call} - \Delta_{put}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	*call*										*put*								
2	*strike*	*bid*	*ask*	*mid*	*Vol.Imp.*	*delta*	*gamma*	*theta*	*vega*	*vomma*	*bid*	*ask*	*mid*	*Vol.Imp.*	*delta*	*gamma*	*theta*	*vega*	*vomma*
3	18000	758,0	763,0	760,5	14,09%	68,57%	0,000306	-4,827	31,870	0,000441	239,5	243,0	241,3	14,00%	-31,34%	0,000307	-1,723	29,196	0,000451
4	18050	721,0	726,0	723,5	13,93%	67,16%	0,000315	-4,807	31,950	0,000383	252,0	256,0	254,0	13,87%	-32,78%	0,000316	-1,700	29,749	0,000390
5	18100	684,0	690,0	687,0	13,77%	65,69%	0,000324	-4,783	32,029	0,000326	265,0	269,0	267,0	13,71%	-34,25%	0,000325	-1,667	30,264	0,000331
6	18150	649,0	654,0	651,5	13,61%	64,17%	0,000333	-4,753	32,108	0,000268	279,0	283,0	281,0	13,56%	-35,79%	0,000334	-1,630	30,751	0,000272
7	18200	614,0	619,0	616,5	13,46%	62,59%	0,000342	-4,718	32,186	0,000212	294,0	298,0	296,0	13,43%	-37,39%	0,000342	-1,591	31,203	0,000214
8	18250	580,0	585,0	582,5	13,31%	60,96%	0,000350	-4,676	32,262	0,000160	309,0	314,0	311,5	13,29%	-39,03%	0,000351	-1,542	31,608	0,000161
9	18300	547,0	552,0	549,5	13,17%	59,27%	0,000358	-4,631	32,337	0,000111	327,0	330,0	328,5	13,16%	-40,73%	0,000358	-1,491	31,968	0,000112
10	18350	515,0	520,0	517,5	13,03%	57,53%	0,000365	-4,578	32,410	0,000070	344,0	348,0	346,0	13,03%	-42,47%	0,000365	-1,431	32,273	0,000070
11	18400	484,0	489,0	486,5	12,91%	55,74%	0,000371	-4,520	32,481	0,000036	362,0	366,0	364,0	12,90%	-44,26%	0,000372	-1,363	32,519	0,000036
12	18450	454,0	459,0	456,5	12,78%	53,90%	0,000377	-4,456	32,548	0,000012	381,0	386,0	383,5	12,78%	-46,10%	0,000377	-1,290	32,702	0,000012
13	18500	426,0	430,0	428,0	12,68%	52,03%	0,000382	-4,387	32,613	-0,000001	403,0	407,0	405,0	12,68%	-47,97%	0,000381	-1,217	32,816	-0,000001
14	18550	398,0	402,0	400,0	12,56%	50,13%	0,000386	-4,310	32,673	-0,000001	424,0	429,0	426,5	12,57%	-49,87%	0,000385	-1,131	32,859	-0,000001
15	18600	371,0	375,0	373,0	12,44%	48,19%	0,000389	-4,223	32,727	0,000014	447,0	451,0	449,0	12,46%	-51,80%	0,000388	-1,039	32,825	0,000014
16	18650	345,0	349,0	347,0	12,33%	46,23%	0,000391	-4,131	32,775	0,000045	471,0	475,0	473,0	12,36%	-53,75%	0,000390	-0,941	32,713	0,000045
17	18700	321,0	325,0	323,0	12,24%	44,26%	0,000392	-4,038	32,814	0,000092	496,0	501,0	498,5	12,29%	-55,71%	0,000390	-0,842	32,522	0,000091
18	18750	298,0	302,0	300,0	12,16%	42,29%	0,000391	-3,938	32,843	0,000156	523,0	527,0	525,0	12,20%	-57,67%	0,000390	-0,734	32,249	0,000153
19	18800	276,0	279,0	277,5	12,06%	40,30%	0,000390	-3,828	32,858	0,000238	550,0	555,0	552,5	12,13%	-59,63%	0,000388	-0,622	31,896	0,000233
20	18850	255,0	258,0	256,5	11,97%	38,33%	0,000387	-3,715	32,855	0,000337	578,0	583,0	580,5	12,04%	-61,60%	0,000385	-0,499	31,459	0,000330
21	18900	235,0	238,5	236,8	11,91%	36,38%	0,000383	-3,601	32,832	0,000450	608,0	613,0	610,5	11,97%	-63,53%	0,000381	-0,378	30,950	0,000440
22	18950	216,5	219,5	218,0	11,83%	34,44%	0,000378	-3,479	32,780	0,000581	639,0	644,0	641,5	11,91%	-65,44%	0,000376	-0,253	30,365	0,000565
23	19000	199,0	202,0	200,5	11,77%	32,54%	0,000372	-3,356	32,695	0,000722	671,0	676,0	673,5	11,86%	-67,32%	0,000369	-0,124	29,713	0,000701

Figura 5

Andiamo a leggere la chain delle opzioni giugno '24 (vedi figura 5). Sono le ore 11:54, circa, del 8/4/2024, con lo spot a circa 18.290. Ed ora calcoliamo il delta di portafoglio, supponendo di aver acquistato una call 18.500 e venduto una put dello stesso strike. Troviamo:

$$\Delta = \Delta_{call,18.500} - \Delta_{put,18.500} = 52{,}03\% - (-47{,}97\%) = 100\%$$

Provate, per esercizio, a fare lo stesso calcolo immaginando di aver inserito, nel nostro portafoglio, call e put a strike differenti. Per esempio, 18.450, oppure 18.550, o quello che volete voi. Troverete, a meno di qualche decimale di approssimazione, sempre 100%. Qual è, quindi, la conclusione?

Un portafoglio costituito da una call long ed una put short, pari strike e scadenza, ha delta pari al 100%.

E, siccome al secondo membro abbiamo un future long, questo vuol dire che anche il future ha delta eguale al 100% (o, se preferite, pari ad 1). E questa è la dimostrazione (direi sufficientemente rigorosa) che il delta di un future è costante e pari ad 1. Tale delta, inoltre, è insensibile a variazioni di tempo e di volatilità implicita; insomma, è costante, qualunque cosa accada. Si potrebbe obiettare che, guardando al portafoglio di sinistra, dove ci sono le opzioni, queste hanno un delta che, invece, è sensibile sia a variazioni di tempo che di volatilità implicita. Questo è vero ma, per singola opzione. Quando, però, andiamo a calcolare il delta di portafoglio, ci accorgiamo che tali variazioni si compensano.

In figura 6 ho riportato lo strike 18.500 dove, per ciascuna delle quattro righe, ho aumentato la volatilità implicita di 1%, 5%, 10% e 50%. Ebbene, calcolando il delta di portafoglio, otterremo sempre 100%!

call										*put*								
strike	*bid*	*ask*	*mid*	*Vol.Imp.*	*delta*	*gamma*	*theta*	*vega*	*vomma*	*bid*	*ask*	*mid*	*Vol.Imp.*	*delta*	*gamma*	*theta*	*vega*	*vomma*
18500	421,0	426,0	423,5	13,68%	51,74%	0,000354	-4,596	32,605	-0,000002	407,0	411,0	409,0	13,68%	-48,26%	0,000354	-1,422	32,809	-0,000002
18500	421,0	426,0	423,5	17,68%	51,98%	0,000274	-5,466	32,603	-0,000002	407,0	411,0	409,0	17,68%	-48,02%	0,000274	-2,292	32,799	-0,000002
18500	421,0	426,0	423,5	22,68%	52,35%	0,000213	-6,554	32,600	-0,000002	407,0	411,0	409,0	22,68%	-47,66%	0,000213	-3,380	32,783	-0,000002
18500	421,0	426,0	423,5	62,68%	55,72%	0,000077	-15,171	32,569	-0,000002	407,0	411,0	409,0	62,68%	-44,28%	0,000077	-11,997	32,502	-0,000002

Figura 6

$$\Delta = \Delta_{call,18.500} - \Delta_{put,18.500} = 51{,}74\% - (-48{,}26\%) = 100\%$$

$$\Delta = \Delta_{call,18.500} - \Delta_{put,18.500} = 51{,}98\% - (-48{,}02\%) = 100\%$$

$$\Delta = \Delta_{call,18.500} - \Delta_{put,18.500} = 52{,}35\% - (-47{,}66\%) = 100\%$$

$$\Delta = \Delta_{call,18.500} - \Delta_{put,18.500} = 55{,}72\% - (-44{,}28\%) = 100\%$$

Nel terzo caso la somma sarebbe 100,01%, ma Excel mi restituisce 100% poiché è costretto a fare un'approssimazione. Infatti, Excel esegue i calcoli con tutti i decimali che conosce, ma in visualizzazione mostra l'intero, avendo io chiesto di arrotondare il risultato.

	call							put							
strike	mid	Vol.Imp.	delta	gamma	theta	vega	vomma	mid	Vol.Imp.	delta	gamma	theta	vega	vomma	
18500	429,9	12,66%	52,22%	0,000382	-4,391	32,608	0,000000	401,7	12,66%	-47,78%	0,000382	-1,218	32,809	0,000000	08/04/24 12.47
18500	376,0	11,02%	52,22%	0,000439	-4,037	32,608	0,000001	385,8	12,18%	-47,78%	0,000397	-1,115	32,809	0,000000	20/04/24 12.25
18500	224,9	6,41%	52,22%	0,000754	-3,056	32,608	0,000031	330,3	10,49%	-47,78%	0,000461	-0,750	32,808	0,000002	20/05/24 12.25
18500	89,5	2,27%	52,22%	0,002108	-2,268	32,608	0,002123	262,1	8,40%	-47,78%	0,000575	-0,304	32,801	0,000009	10/06/24 12.25

Figura 7

In figura 7, invece, ho fissato tutte le variabili tranne il tempo. E, rispetto alla variazione di questo (evidenziato in giallo in figura 7), ho ricalcolato i valori delle opzioni (colonna mid) e le greche.

Il delta di portafoglio continua ad essere pari al 100%, com'era lecito attendersi.

$$\Delta = \Delta_{call,18.500} - \Delta_{put,18.500} = 52{,}22\% - (-47{,}78\%) = 100\%$$

Quindi, come anticipato, il delta varia al variare della volatilità implicita e del tempo ma, per singola opzione. Nel delta di portafoglio, però, queste variazioni si compensano.

Il vega

E cosa succede al vega del nostro portafoglio? Premesso che ci riferiamo sempre al portafoglio call long e short put:

Il vega di portafoglio è nullo e, pertanto, è nullo anche il vega di un future.

Vediamolo sempre con un esempio numerico. Riferiamoci, ancora una volta, alla figura 5, guardiamo allo strike 18.500 e calcoliamo il vega di portafoglio:

$$V = V_{call,18.500} - V_{put,18.500} = 32{,}61 - 32{,}82 \cong 0$$

A parte gli inevitabili errori di approssimazione.

Ma perché accade? Proviamo a spiegarlo. La formula per il calcolo del vega, derivante dal modello matematico B&S, è la medesima, sia per le call che per le put. Dipende dallo strike, dal valore del sottostante, dal tempo a scadenza, dal tasso di interesse privo di rischio e dalla volatilità implicita. Siccome, fissato lo strike, tutte le altre variabili sono le medesime, sia per la call che per la put, il risultato della funzione deve essere, per forza di cose, lo stesso (quella piccola variazione dipende dal fatto che le volatilità implicite, per la call e per la put, calcolate dal foglio elettronico, non sono esattamente le stesse come, invece, dovrebbero essere da un punto di vista matematico; diversamente si avrebbero un'opportunità di arbitraggio).

Il gamma

Per il gamma valgono esattamente le stesse considerazioni fatte per il vega. Quindi:

Il gamma di portafoglio è nullo. E, pertanto, è nullo anche il gamma di un future.

Provate, per esercizio, a fare qualche calcolo.

Il theta

Questa greca l'ho lasciata per ultima perché, come si potrà osservare, crea qualche difficoltà di interpretazione. Partiamo sempre dalla figura 5 e, riferendoci sempre allo strike 18.500, andiamo a leggere il theta delle due opzioni. Troviamo:

$$\Theta_{call,18.500}=-4{,}387$$

$$\Theta_{put,18.500}=-1{,}217$$

Pertanto, se calcoliamo il theta di portafoglio, abbiamo:

$$\Theta = \Theta_{call,18.500} - \Theta_{put,18.500} = -4{,}387-(-1{,}217) = -3{,}17$$

(ricordiamoci che in portafoglio abbiamo una short put, quindi il suo theta va sottratto; ma, poiché questo è negativo, il doppio segno meno diventa segno positivo).

Quindi, si dovrebbe concludere, che anche il future è caratterizzato dalla greca theta. Ma la teoria ci dice che questo non è vero: un future ha solo una greca, il delta. Delta che è costante e, a differenza del delta delle opzioni, non varia al variare della distanza strike-sottostante, della volatilità implicita e del tempo e, per completezza, bisognerebbe aggiungere anche del tasso di interesse.

E allora? Come si spiega la presenza di un theta di portafoglio che non è zero?

Cerchiamo di comprenderlo. Prendiamo un calcolatore per aiutarci con i calcoli della B&S. Impostiamo volatilità implicita, data di scadenza delle opzioni, data attuale, tasso free risk e strike (vedi figura 8).

Inserisci i parametri

Sottostante	18.290
Strike	18.500
Oggi	9/4/24 11.54 AM
Scadenza	21/6/24 1.00 PM
Volatilità	12,68%
Tasso Risk Free	6,30%
Dividendi	0,00%
Giorni a scadenza	73,04583333
Giorni in anni	0,200

Calcola greche

	Call	Put
Prezzo	424,58	402,80
Delta	0,5197	-0,4803
Gamma	0,000384	0,000384
Theta	-4,3970	-1,2439
Vega	32,6021	32,6021

Trova volatilità

	Call	Put
Prezzo	30,00	75,00
Volatilità	0,52%	2,62%

Istruzioni

	celle editabili
	celle non editabili

Sunny MONEY Facciamo luce sui mercati

Figura 8

Osserviamo i prezzi della call e della put, rispettivamente pari a 424,58 e 402,80. Osserviamo la greca in esame, il theta: -4,397 per la call e -1,2439 per la put.

Bene, adesso facciamo trascorrere esattamente un giorno, passando dal 9 aprile al 10 aprile. Lasciamo invariate tutte le altre variabili. Cosa si ottiene? Ciò che mostra la figura 9.

Inserisci i parametri

Sottostante	18.290
Strike	18.500
Oggi	10/4/24 11.54 AM
Scadenza	21/6/24 1.00 PM
Volatilità	12,68%
Tasso Risk Free	6,30%
Dividendi	0,00%
Giorni a scadenza	72,04583333
Giorni in anni	0,197

Calcola greche

	Call	Put
Prezzo	420,17	401,55
Delta	0,5184	-0,4816
Gamma	0,000387	0,000387
Theta	-4,4139	-1,2602
Vega	32,3830	32,3830

Trova volatilità

	Call	Put
Prezzo	30,00	75,00
Volatilità	0,59%	2,59%

Istruzioni

(arancione)	celle editabili
(bianco)	celle non editabili

Figura 9

Se andiamo a sottrarre il theta della call al valore che aveva precedentemente, otteniamo:

$$424{,}58 - 4{,}397 = 420{,}183$$

e, per la put:

$$402{,}8 - 1{,}2439 = 401{,}56$$

che, a parte qualche decimale, coincidono con i valori mostrati in figura 9. E questo, immagino che ce l'aspettassimo tutti. Andiamo avanti. Ricordiamo la put-call parity, che avevamo manipolato a pagina 5, giungendo alla forma:

$$K + (c - p) \cdot e^{rT} = F_0$$

che possiamo riscrivere:

$$(c - p) \cdot e^{rT} = F_0 - K$$

Il primo giorno, figura 8, al primo membro abbiamo:

$$(c - p) \cdot e^{rT} = (424{,}58 - 402{,}8) \cdot e^{6{,}3\% \cdot 0{,}2} = 22{,}06$$

differenza che, nel giorno successivo, diviene:

$$(c - p) \cdot e^{rT} = (420{,}17 - 401{,}55) \cdot e^{6{,}3\% \cdot 0{,}197} = 18{,}85$$

Teniamo quindi a mente che, il portafoglio del primo membro, costituito da una long call ed una short put, col passare di un giorno cala da 22,06 a 18,85. Ovvero:

$$22{,}06 - 18{,}85 = 3{,}21$$

Vediamo ora che succede al secondo membro, dove abbiamo la differenza tra un long future e lo strike K delle due opzioni. Calcoliamo, dapprima, il valore del future associato al primo giorno:

$$F_0 = S_0 \cdot e^{rT} = 18290 \cdot e^{6{,}3\% \cdot 0{,}2} = 18.522{,}06$$

e poi, quello associato al giorno successivo:

$$F_0 = S_0 \cdot e^{rT} = 18290 \cdot e^{6{,}3\% \cdot 0{,}197} = 18.518{,}86$$

Il calo del future, in un giorno, è:

$$18.522{,}06 - 18.518{,}86 = 3{,}2$$

Un suggerimento: fate i calcoli con Excel, che tiene in memoria un numero elevato di decimali.

Quindi, mentre il solo trascorrere di un giorno (con tutte le altre variabili costanti) comporta un calo del portafoglio del primo membro di 3,21 dovuto al theta delle due opzioni, al secondo membro il future cala della stessa quantità ma per ragioni dovute ad un minor interesse essendoci un giorno in meno.

Si potrebbe dire, pertanto, che anche il future è caratterizzato dalla greca theta. Ma ciò è concettualmente errato. Quando stipuliamo un contratto future, non dobbiamo pagare nessun premio (il deposito di garanzia non è un costo). Mentre, quando stipuliamo un contratto di opzione, la parte long deve, alla parte short, il premio per l'opzione acquistata. E tale premio, è soggetto al decadimento temporale.

Spero sia stato sufficientemente chiaro.

Conclusioni

Ancora una volta, a mio parere, occorre stupirsi del lavoro di Stoll che, ben prima della pubblicazione dell'opera di Black, Scholes e Merton, ha messo a disposizione della comunità scientifica nell'ambito della finanza la nota equazione.

Una possibile applicazione di questa formula, come si è cercato di mettere in luce con questo articolo, è la dimostrazione che un contratto future non è caratterizzato dalle greche (se si esclude il delta che, comunque, è costante e pari ad 1) come, invece, accade per i contratti di opzione.

Mostrando che un portafoglio contenente una long call ed una short put, entrambe di pari scadenza e strike, è equivalente ad un portafoglio contenente un future, della medesima scadenza, si è inoltre fatto un passo avanti verso la costruzione delle cosiddette opzioni sintetiche. Argomento che sarà approfondito nella parte successiva.

Buon lavoro!